Kurzer Inbegriff der nützlichsten Wissenschaften für die Jugend

Daniel, Karl

Potsdam, 1819

Grundriß ersten Unterrichts in den Anfangsgründen der Mathematik.

urn:nbn:de:kobv:517-vlib-9161

Grundriß
eines
ersten Unterrichts
in den
Anfangsgründen
der
Mathematik,

bearbeitet
von
Carl Friedrich Daniel.

Potsdam 1817,
bei Carl Christian Horvath.

Preis 6 gute Groschen Courant.

Den

Königlichen Professoren

Herren:

J. J. Arlaud,

am französischen Gymnasium,

P. Erman,

an der Universität und Kriegsschule, der Akademie der Wissenschaften und mehrerer Gelehrten-Gesellschaften Mitgliede,

E. G. Fischer,

am Berlinischen Gymnasium, Mitgliede der Akademie der Wissenschaften,

A. Hartung,

an der Kriegsschule, Direktor verschiedener berühmter Privatschulen, und

F. Wolff,

am Joachimsthalschen Gymnasium,

sämmtlich in Berlin,

mit der innigsten Verehrung

gewidmet

von

dem Verfasser.

Vorbericht.

Das Eigenthümliche dieses Leitfadens beim ersten Unterricht in der Mathematik, welcher in Auslassung der Beweise schon seine Vorgänger hat, besteht 1) in der strengen Scheidung der Erklärungen, Sätze und Aufgaben, 2) in dem zusammenhangenden Vortrage jeder dieser Abtheilungen der Disciplinen, 3) in einer von dem gewöhnlichen Ausdruck abweichenden Darstellung der Sätze. Erstes hat besonders in der Arithmetik große Schwierigkeiten, und doch ist eine streng wissenschaftliche Behandlung derselben als ein allgemeines Bildungsmittel höchst wünschenswerth. Die Zusammenstellung jener Theile in eigenen Abschnitten, deren Trennung nach den Bedürfnissen ja übrigens den Lehrern überlassen bleibt, wie ich auch in der Arithmetik durch die 6 Abtheilungen jedes Abschnitts dieselbe erleichtert habe, deutet wieder besondere Cursus des ersten Unterrichts an, wie ich sie in den unter meiner Direktion stehenden Schulen immer mit Nutzen angeordnet habe. Nämlich zuerst wird der dritte Abschnitt der Arithmetik als vorläufiger praktischer Unterricht im Rechnen durchgenommen, und die nöthigen Erklärungen werden vom Lehrer nur gelegentlich beiläufig gegeben hinzugefügt; dann folgt ein strenger Vortrag der Erklärungen, der Sätze und Beweise der Richtigkeit jenes praktischen Verfahrens. Auch in in der Geometrie habe ich verschiedentlich diese Folge beobachtet, und durch die kurze Voranschickung des Praktischen, besonders der Verrichtungen auf dem Felde, als Einleitung in den systematischen Unterricht ein lebhaftes Interesse für diesen bei der Jugend erweckt. Die Verbindung des ersten und dritten Abschnitts der Geometrie scheint mir dasselbe zu leisten, was durch die jetzt beliebten, weniger mathematischen Formenlehren beabsichtigt wird. Möchten Sachkundige meine ausführlichern Darstellungen der Sätze, deren Nothwendigkeit und Nutzen ich oft erfahren habe, nicht für Verwässerungen derselben erklären! jeder Lehrer kann ja vorher oder nachher den kurzen Ausdruck des Satzes hinzufügen.

Möchten auch manche neue Erklärungen, die ich gewagt habe, um die Cirkel der gewöhnlichen zu vermeiden, in der strengen Kritik bestehen! — Die Beweise der Sätze und Auflösungen werde ich auf Verlangen in einem besondern Bändchen liefern.

Potsdam, am 25ten Aprils 1817.

Der Verfasser.

Einleitung.

§. 1.

Wir schreiben einem Dinge eine Größe zu, insofern es aus Theilen besteht, deren mehr oder weniger sein könnten; im ersten Falle würde seine Größe vermehrt, im letzten verringert sein. Auch jeden Theil können wir uns wieder bis ins Unendliche zertheilt denken, (wenn auch die Ausführung für uns zuletzt nicht mehr möglich wäre).

§. 2. Wenn wir zu einer Größe noch eine andere, ebensolche Größe hinzusetzen (oder denken), so entsteht eine neue Größe, wovon die beiden vorigen Theile sind, und so können wir durch noch mehrmalige Zusammensetzung solcher Größen, wie die erste, andere, gleichartige Größen hervorgebracht denken. Der Ge-

Gedanke, wodurch wir uns ein zuerstgedachtes Ding gewissemal (ein, oder mehrmal) vorstellen (z. B. Acht), ist eine Zahl. Wenn wir uns aber andere Dinge auch ebensovielmal denken, so entsteht in unsern Gedanken dieselbe Zahl (Acht); daher betrachten wir die Zahlen als nicht bloß zu den Dingen gehörige, sondern auch fürsichselbst (in unsern Gedanken) bestehende Dinge, und nennen sie ebenfalls Größen (§. 1.), weil sie auch aus Theilen bestehen, nämlich aus den besondern Einsen, und selbst jede Eins wieder in unendlich viele Theile zerlegt gedacht werden kann, wie die erste Größe, welche für sich allein gedacht wurde.

§. 3. Eine Wissenschaft von den Eigenschaften und dem Zusammenhange (den Verhältnissen) der Größen heißt die Mathematik, deren Haupttheile die Arithmetik und Geometrie sind, deren erster sich mit Zahlen, und letzter mit Raumgrößen beschäftigt. Der Endzweck dieser Wissenschaft ist, unbekannte Größen durch ihre Verhältnisse (ihren Zusammenhang) mit bekannten Größen bestimmen zu lehren. (Z. B. die unbekannte Zahl der Lothe eines Centners findet man dadurch, daß man weiß, 32 Loth machen 1 Pfund, und 110 Pfund einen Centner aus).

§. 4. Der zur unumstößlichen Gewißheit führende Gang dieser Wissenschaft ist folgender.

a. Sie giebt bestimmte Erklärungen (Definitiones) oder genaue Beschreibungen der Größen, mit denen sie sich beschäftigt, und der Verrichtungen, welche sie mit ihnen vornimmt, (welches sie deswegen auf das bestimmteste und vollkommenste zu leisten vermag, weil sie sich die Größen, womit sie sich ursprünglich beschäftigt, z. B. die Zahlen, alle selbst bildet, und nachher erst ihre gewissen Kenntnisse von denselben auf Gegenstände der Erfahrung anwendet).

b. Sie stellt von ihren Größen gewisse Sätze d. h. Behauptungen als unbezweifelt auf. Diese werden zwar gewöhnlich noch eingetheilt in

α. Grundsätze (axiomata), die keines Beweises bedürfen, weil sie ohne denselben dem Verstande als unzweifelhaft einleuchten, z. B. jede ganze Größe ist allen ihren Theilen zusammengenommen gleich;

β. Lehrsätze (theoremata), deren Wahrheit erst durch Beweise einleuchtet; ein Beweis besteht nämlich wieder aus einer Reihe von Sätzen, deren jeder immer aus dem vorigen fließt, d. h. dessen Unwahrheit auch die Wahrheit des vorigen aufheben würde, und deren erster entweder aus einer Erklärung, oder aus dem hervorgeht, was man selbst gemacht hat (Construction), oder was man als gemacht annimmt (Voraussetzungen);

γ. Folgesätze oder Zusätze (Corollaria), deren Wahrheit auch ohne Beweis aus einem bewiesenen Lehrsatze folgt;

aber im Grunde sind alle Sätze von einer Art, denn die Beweise der Folgesätze liegen ja schon in den vorher bewiesenen Lehrsätzen, und die der Grundsätze in den vorhergegangenen Erklärungen, und diese, obgleich ganz kurzen, Beweise könnten daher auch wohl noch besonders vorgetragen werden.

c. Endlich legt die Mathematik Aufgaben vor, d. h. sie verlangt, daß etwas ausgeführt werde, wovon man gewiß überzeugt seyn kann, daß es so ist, wie es verlangt wurde. Diese Aufgaben lehrt sie durch Hülfe vorher bewiesener Lehrsätze auflösen, aus welchen dann auch die Richtigkeit der Ausführung bewiesen wird.

Allgemeine Erklärungen.

§. 5. Wenn Größen mit einander in allen ihren Theilen und Merkmalen völlig übereinstimmen, so werden sie einander gleich (=) genannt.

§. 6. Wenn eine Größe so beschaffen ist, daß noch eine andere Größe zu ihr hinzukommen muß, um erst eine gewisse dritte Größe auszumachen, so ist jene erste (und auch die zweite) ein Theil dieser dritten Größe, (z. B. 5 ist ein Theil von 7, weil noch 2 hinzukommen muß, um 7 auszumachen).

§. 7. Jede Größe wird in Rücksicht ihrer Theile das Ganze derselben genannt, (7 ist das Ganze von 5 und 2).

§. 8. Eine Größe, die weniger gleiche Theile als eine andre Größe enthält, wird kleiner (<) als diese genannt, (2 < 5).

§. 9. Eine Größe, die mehr gleiche Theile als eine andere enthält, wird größer (>) als diese genannt (9 > 6).

§. 10. Zwei Größen, deren eine größer ist als die andere, diese also kleiner als jene, werden ungleich genannt.

§. 11. Eine Größe zur andern hinzusetzen (addiren, +) heißt, sie zusammen als Theile einer dritten Größe betrachten, die man dann auch ihre Summe nennt.

§. 12. Eine Größe von einer andern abziehen (subtrahiren, —), heißt, jene nicht mehr als Theil dieser andern, wie vorher, betrachten, so, daß die zurückbleibenden Theile nun eine Größe ausmachen, welche kleiner ist als die vorige, und dann gewöhnlich der Rest der vorigen Größe, oder der Unterschied, die Differenz zwischen ihr und dem abgezogenen Theile genannt wird.

§. 13. Wenn eine Größe gewisse Mal genommen oder gedacht (multiplizirt, ×) wird, so heißt die dadurch entstehende neue Größe ein Vielfaches der ersten, und zwar nach der bestimmten Zahl, wievielmal diese genommen ist, das Zweifache, Dreifache u. s. w. der ersten Größe.

§. 14.

§. 14. Wenn man eine Größe in gewisse gleiche Theile zerlegt oder getheilt denkt (dividirt, :), so heißt jeder dieser gleichen Theile ein Bruch oder aliquoter Theil der ersten Größe, und zwar nach der bestimmten Zahl, in wieviel gleiche Theile diese zerlegt gedacht wird, die Hälfte, das Drittheil u. s. w. der ersten Größe.

Allgemeine Grundsätze.

§. 15. Jede Größe ist sich selbst gleich, (d. h. wenn man sich dieselbe einige Mal, z. B. in verschiedenen Verbindungen denkt, so hat sie das eine Mal dieselben Theile und Merkmale wie in der andern Verbindung).

§. 16. Wenn man weiß, daß Größen einander gleich sind, so kann man die eine an die Stelle der andern setzen, (ohne dadurch in einer solchen Größe, deren Theil diese war, etwas zu verändern).

§. 17. Wenn man versichert ist, daß jede von zwei Größen einer dritten gleich ist ($a = x$ und $b = x$), so kann man auch behaupten, daß die beiden ersten selbst einander gleich sind ($a = b$).

§. 18. Jeder Theil einer Größe ist kleiner als sein Ganzes ($7 < 12$, $5 < 12$).

§. 19. Jedes Ganze ist größer als jeder seiner Theile ($12 > 7$, $12 > 1$, $12 > 4$).

§. 20. Jedes Ganze ist gleich allen seinen Theilen zusammengenommen ($12 = 7 + 1 + 4$).

§. 21. Wenn man weiß, daß Größen einander gleich sind ($7 + 2 = 6 + 3 = 5 + 4$), und

und man addirt gleiche Größen zu ihnen allen, so sind auch die Summen wieder einander gleich ($7 + 2 + 8 = 6 + 3 + 8 = 5 + 4 + 8$).

§. 22. Wenn Größen einander gleich sind ($4 + 8 = 3 + 9$), und man zieht gleiche Theile von allen ab, so sind auch die Reste einander gleich ($4 + 8 - 7 = 3 + 9 - 7$).

§. 23. Wenn Größen ungleich sind ($7 > 5$), und man setzt gleiche Größen zu beiden hinzu, so werden die Summen wieder ungleich ($7 + 3 > 5 + 3$).

§. 24. Wenn man zu gleichen Größen ($4 + 8 = 9 + 3$) ungleiche addirt, so entstehen auch ungleiche Summen ($4 + 8 + 5 < 9 + 3 + 7$).

§. 25. Wenn von gleichen Größen ($4 + 8 = 9 + 3$) ungleiche abgezogen werden, so bleiben ungleiche Reste ($4 + 8 - 7 < 9 + 3 - 2$).

§. 26. Von ungleichen Größen ($10 > 5$) gleiche abgezogen, läßt auch ungleiche Reste ($10 - 3 > 5 - 3$).

§. 27. Wenn man überzeugt ist, daß Größen einander gleich sind ($7 + 2 = 6 + 3$), und man nimmt sie gleichvielmal, so werden auch diese ihre gleichnamigen Vielfachen einander gleich ($\overline{7 + 2} \times 4 = \overline{6 + 3} \times 4$).

§. 28. Wenn ungleiche Größen gleichvielmal genommen werden, so sind auch ihre gleichnamigen Vielfachen ungleich ($7 \times 4 > 5 \times 4$).

§. 29.

§. 29. Wenn gleiche Größen nicht gleichvielmal genommen werden, so sind auch die Vielfachen ungleich ($8 \times 3 < 8 \times 4$).

§. 30. Wenn Größen gleich sind ($8 + 4 = 12$), und man theilt sie in gleichviel gleiche Theile, (in 4), so sind ihre gleichvielsten Theile, ihre gleichnamigen Brüche (ihre Viertheile) auch einander gleich ($\overline{8 + 4} : 4 = 2 + 1 = 3$, $12 : 4 = 3$).

§. 31. Wenn Größen gleich sind, und man theilt sie in nichtgleichviel Brüche, so werden diese ungleich ($12 : 4 = 3$, $12 : 2 = 6$).

§. 32. Wenn man ungleiche Größen in gleichviel Brüche theilt, so werden diese auch ungleich ($16 : 4 = 4$, $12 : 4 = 3$).

Arithmetik.

Erster Abschnitt.

Erklärungen.

I.

Von dem Wesen und der Eintheilung der (ganzen) Zahlen.

§. 33.

Die Arithmetik oder Rechenkunst ist der Theil der Mathematik, welcher die Natur und die Verhältnisse der **Zahlen**, die mit ihnen möglichen Veränderungen kennen, und dadurch unbekannte Zahlen aus ihrem bekannten Verhältnisse mit bekannten Zahlen finden lehrt (§. 3).

§. 34. Wenn Größen in den Merkmalen übereinstimmen, welche in einem vorliegenden Falle in Betrachtung kommen, so nennt man dieselben in ebendiesem Falle **gleichartige Größen**, (obgleich sie bei einer andern Betrachtung

als

als sehr verschieden oder von ungleicher Art erscheinen können; z. B. wenn von Borstorfer Aepfeln die Rede ist, so sind nur solche gleichartig, aber Borstorfer und Rostocker von ungleicher Art; kommen indessen Aepfel überhaupt in Betrachtung, so sind auch diese gleichartig; wenn von Obst überhaupt die Rede ist, so sind Aepfel und Pflaumen von gleicher Art; ja sogar Aepfel und Steine sind gleichartig, wenn bloß Körper in Betrachtung kommen).

§. 35. Eine Größe, die man sich in einem gewissen Falle von andern gleichartigen Größen abgesondert denkt, nennt man eine Einheit; (sie kann aber in andern Betrachtungen wieder als Mehrheit erscheinen; z. B. 1 Thaler ist, als Thaler betrachtet, eine Einheit, als Geld überhaupt, und insbesondere als Groschen betrachtet, eine Mehrheit; die bloße (ganze) Zahl Eins, die man nicht mit einer andern, benannten Größe zusammen denkt, ist eine unwandelbare Einheit).

§. 36. Das gewissemalige Denken einer Einheit wird eine Zahl genannt. (Auch die Eins ist nach dieser Erklärung eine Zahl, denn sie ist das einmalige Denken der Einheit).

§. 37. Wenn man sich zur Einheit noch eine ebensolche hinzudenkt, so nennt man ihre gemeinschaftliche Zahl Zwei; zu derselben noch einmal die Einheit hinzugedacht, giebt die Zahl Drei u. s. w., wie bekannt, bis Zehn.

§. 38.

§. 38. Die Zahl Zehn, welche zehn Einheiten enthält, wird, nach der gewöhnlichen Art zu zählen, wieder als eine besondere Einheit betrachtet, und gegen die ursprüngliche Einheit ein Zehner genannt.

§. 39. Die Zahl von zehn Zehnern giebt wieder eine neue Einheit, welche ein Hundert genannt wird.

§. 40. Die Zahl von zehn Hunderten wird als eine Einheit betrachtet, die man ein Tausend nennt. Die Tausende nennt man insbesondere eine höhere Klasse der Einheiten, in welcher man auch wieder Zehner und Hunderte annimmt (§§. 38, 39).

§. 41. Eine Zahl von tausend Tausenden wird aber wieder als eine noch höhere Abtheilung von Einheiten betrachtet, welche man eine Million nennt. In dieser Abtheilung der Millionen giebt es dann wieder zwei Klassen, nämlich die niedere der einfachen Millionen, und die höhere Klasse der Tausende von Millionen, deren jede wieder, wie die beiden Klassen der ersten Abtheilung (§§. 38 — 40), von Einern zu Zehnern, und von Zehnern zu Hunderten steigt.

§. 42. Eine Zahl von einer Million Millionen heißt eine Billion; die Billionen machen wieder eine höhere Abtheilung aus, welche wieder wie die der Millionen behandelt wird (§. 41). Die darauf folgenden höhern Abtheilungen heißen die der Trillionen, Quadrillionen, Quintillionen u. s. w., welche alle, wie

die

die vorigen Abtheilungen, aus zwei Klassen bestehen.

§. 43. Die bekannten Zeichen, worin alle möglichen Zahlen schriftlich sehr kurz dargestellt werden, heißen Ziffern (arabische). Wenn eine solche Ziffer allein dasteht, so bezeichnet sie die ursprünglich gedachten Einheiten; stehen zwei derselben neben einander, so bedeutet nur die erste auf der rechten Seite ursprüngliche, die zweite aber Einheiten von Zehnern; eine Ziffer in einer dritten Stelle (immer von der rechten Seite an gerechnet) bezeichnet Einheiten von Hunderten. In den drei folgenden Stellen bezeichnen Ziffern die Klasse der Tausende (§. 40), und zwar in der vierten die Einer derselben, in der fünften die Zehner der Tausende, in der sechsten die Hunderte derselben. In den sechs folgenden Stellen bezeichnen ebensolche Ziffern die höhere Abtheilung der Einheiten, nämlich der Millionen (§. 41), und zwar in der siebenten, achten und neunten Stelle die niedere Klasse der einfachen Millionen, in der zehnten, elften und zwölften die höhere Klasse der Tausende von Millionen, und jede Klasse in den gewöhnlichen drei Stellen der Einer, Zehner und Hunderte. Die sechs Stellen der Abtheilung der Billionen fangen mit der dreizehnten, die der Trillionen mit der neunzehnten an, u. s. w.

§. 44. Die 0 bedeutet in allen Stellen Nichts, und wird nur zur Ausfüllung solcher Stellen gebraucht, in welchen keine Zahl-Ziffer vorkommt, damit nicht die folgenden Ziffern nach der linken Seite zu um eine Stelle niedriger betrachtet werden, als sie einnehmen sollen.

§. 45. Jede durch Ziffern ausgedrückte Zahl richtig aussprechen, und jede mit Worten bezeichnete Zahl richtig niederschreiben, heißt numeriren.

II.

Von den vier Grund-Rechnungsarten (Species).

§. 46. Wenn zu einer Zahl noch eine oder mehrere solcher Theile (Einheiten), woraus sie schon besteht, hinzukommen, so sagt man: dieselbe wird vermehrt (§. 1), vermindert hingegen, wenn einer oder mehrere ihrer Theile von ihr abgenommen werden.

§. 47. Zahlen zusammenzählen oder addiren heißt, durch Zusammenfügung ihrer Theile eine neue Zahl hervorbringen, worin sie selbst als Theile enthalten sind (§. 11); diese neu dadurch entstandene (gefundene) Zahl heißt die Summe der ersten (gegebenen) Zahlen, welche auch die Posten genannt werden (3 + 5 + 7 Posten, 15 die Summe).

§. 48. Wenn man eine Zahl, welche als Theil in einer andern enthalten war, von dieser abnimmt, so heißt dies: die erste von der zweiten (größern) Zahl subtrahiren (§. 12); die erste,

klei-

kleinere wird der Subtrahendus, die größere der Minuendus genannt, die neugefundene Zahl, welche aus den übriggebliebenen Theilen des Minuendus besteht, heißt der Rest desselben oder die Differenz zwischen ihm und dem Subtrahendus. (15 Minuendus, 7 Subtrahendus, 8 Differenz).

§. 49. Zwei (ganze) Zahlen mit einander vervielfachen, multipliziren, heißt: die eine derselben (eine beliebige), die man den Multiplikandus nennt, soviel Mal nehmen (§. 13) wie die andere, der Multiplikans, Einheiten enthält. Die dadurch entstandene dritte Zahl wird das Product oder Faktum der beiden gegebenen, und diese zusammen werden auch die Faktoren genannt ($5 \times 3 = 15$, 5 der Multiplikandus, 3 der Multiplikans, 3 und 5 die Faktoren, 15 das Faktum oder Produkt).

§. 50. Wenn man eine (ganze) Zahl in soviel gleiche Theile zerlegt, wie eine andere Einheiten enthält, so heißt dies: die erste mit der zweiten dividiren, theilen, (auch wohl: die zweite in die erste theilen, welches aber ein unrichtiger Ausdruck ist). Die erste Zahl wird der Dividendus, und die zweite der Divisor, die dadurch gefundene dritte Zahl aber, welche die Größe eines jeden dadurch entstandenen Theiles anzeigt, der Antheil genannt. ($15 : 3 = 5$, 15 der Dividendus, 3 der Divisor, 5 der Antheil. Letzter wird auch der Quotient genannt, d. h. welcher das

Wie-

Wievielmalenthaltensein anzeigt, weil, wie sich künftig ergeben wird, auch der Antheil bezeichnet, wie viel Mal der Divisor im Dividendus enthalten ist; aber nach dem ursprünglichen Begriffe der Theilung müßte eigentlich der Divisor der Quotient heißen).

§. 51. Wenn bei einer Division der Antheil aus lauter ganzen Einheiten besteht, so sagt mau: die Theilung geht auf; wenn der Antheil aber Stücke von Einheiten (Brüche §. 14) enthält, so heißt dies: die Division geht nicht auf, ($16 : 3 = 5\frac{1}{3}$ geht nicht auf).

III.

Von der Natur und Bezeichnung der Brüche.

§. 52. Wenn die Einheit in gewisse gleiche Theile zerstückelt ist, so heißt jeder der gleichen Theile und auch die Summe mehrerer derselben ein Bruch, (z. B. ein Viertheil, drei Viertheile); dagegen wird die Einheit selbst und jede Zahl, welche ungetheilte Einheiten enthält, eine ganze Zahl genannt.

§. 53. Der Ausdruck jedes Bruches begreift 2 Zahlen in sich; die eine, welche bestimmt, inwieviel gleiche Theile die Einheit getheilt ist, wird der Nenner des Bruchs (die Benennung der Theile, Viertheile), die andere, welche anzeigt, wieviel solcher Theile gedacht werden sollen, der Zähler des Bruchs (die Zahl der Theile) genannt. Wenn der Bruch mit Ziffern ausgedrückt wird, so setzt

man

man den Zähler über, und den Nenner unter einen Strich ($\frac{1}{4}$, $\frac{3}{4}$).

§. 54. Wenn man Theile der Einheit wieder als kleinere Einheiten betrachten wollte, so wäre der Zähler des Bruchs wieder eine ganze Zahl und der Nenner ein bloßer Name der Einheiten, der dann auch mit Buchstaben geschrieben werden müßte (1 Viertheil, 3 Viertheile).

§. 55. Wenn die gleichnamigen Theile von mehrern Einheiten znsammengezählt werden ($\frac{3}{4} + \frac{2}{4} + \frac{1}{4}$), so entsteht dadurch ein neuer Zähler ($\frac{7}{4}$), welcher anzeigt, daß sein Bruch mehr solche Theile enthalte, als jede der getheilten Einheiten (welche nur $\frac{4}{4}$ enthält), daß also drr Bruch größer sey, als die Einheit. Die eigentliche Natur des Bruchs besteht aber darin, daß er weniger Theile als die Einheit enthalte, weil ja sonst die Theilung der Einheit nicht nöthig gewesen wäre; daher heißt nur ein solcher, dessen Zähler kleiner ist als sein Nenner, ein echter Bruch, und jeder andere ein unechter.

In jedem unechten Bruche ist also die Einheit einmal oder mehrere Mal enthalten, wieviel Mal, erfährt man, wenn man den Zähler mit dem Nenner dividirt. Wenn eine solche Division aufgeht, so heißt der Bruch ein uneigentlicher ($\frac{4}{4}$, $\frac{12}{4}$), weil er bloß ganze Einheiten enthält, also die Theilung eigentlich unnöthig war; ein eigentlicher Bruch heißt aber derjenige, bei welchem jene Division nicht

auf-

aufgeht, sondern (neben dem gefundenen Ganzen) noch ein Bruch im Quotienten bleibt ($\frac{3}{4}$, $\frac{13}{4} = 3\frac{1}{4}$). Eine ganze Zahl nebst einem Bruche heißt eine gemischte Zahl ($5\frac{4}{5}$). In unechte und uneigentliche Brüche läßt sich jede ganze Zahl verwandeln; ($3 = \frac{15}{5} = \frac{21}{7}$).

§. 56. Man pflegt auch oft die Aufgabe oder Anzeige, daß eine Zahl mit einer andern getheilt werden solle, dadurch anzudeuten, daß man den Divisor als Nenner unter den Dividendus setzt ($\frac{20}{5} = 20 : 5$); da die Größe eines solchen Bruches gleich dem Quotienten ist, der durch die Ausführung der Division entsteht, so wird der Bruch selbst oft als dieser Quotient angenommen ($\frac{20}{5} = 4$, §. 16); und da besonders echte Brüche meistens dadurch entstehen, daß eine kleinere Zahl mit einer größern getheilt werden soll, ($5:7$) und, weil sich das nicht in ganzen Zahlen bewerkstelligen läßt, der Divisor als Nenner unter den Dividendus gesetzt wird ($\frac{5}{7}$); so wird überhaupt ein jeder Bruch oft eine aufgegebene, aber nicht ausgeführte Division (in ganzen Zahlen) genannt, und umgekehrt kann jeder Antheil einer Division, wie auch der Divisor, ein Bruch des Dividendus genannt werden; (3 ist $\frac{1}{4}$ von 12, und 4 ist $\frac{1}{3}$ von 12).

§. 57. Der Werth jedes Bruchs (d. h. seine bestimmte Größe gegen Eins) kann durch vielerlei kleinere und größere Zähler und Nenner ausgedrückt werden ($\frac{3}{4}$ auch durch $\frac{6}{8}$, $\frac{9}{12}$, $\frac{15}{20}$ u. s. w.). Einen durch kleinere Zahlen ausgedrückten Bruch durch größere ausdrücken, heißt: seine Glieder erweitern.

§. 58. Wenn verschiedene Brüche eine gleiche Zahl zum Nenner haben, so nennt man denselben ihren gemeinschaftlichen oder General-Nenner, ($\frac{7}{24}$, $\frac{11}{24}$, $\frac{17}{24}$, 24 ist ihr General-Nenner).

§. 59. Wenn eine ganze Zahl mit einer andern so dividirt werden kann, daß die Division aufgeht, so nennt man die erste durch die zweite (in ganzen Zahlen) theilbar oder einen Dividuus der zweiten, und diese ein Maaß der ersten; (8 ist ein Dividuus der 4 und auch der 2, aber 4 und 2 sind Maaße der 8). Die größte der Zahlen, die in einer andern aufgeht, heißt das größte Maaß derselben; (4 ist das größte Maaß der 8). Die kleinste der Zahlen, worin eine andere aufgeht, heißt der kleinste Dividuus derselben, (4 ist der kleinste Dividuus der 2, 6 der kleinste der 3).

§. 60. Eine Zahl, welche in zwei oder mehrern gegebenen Zahlen aufgeht, heißt ein gemeinschaftliches Maaß derselben; (3 ist das gemeinschaftliche Maaß der 6, 9 und 12). Das größte gemeinschaftliche Maaß derselben ist die größte der Zahlen, die in ihnen allen aufgehen; (4 ist das größte gemeinschaftliche Maaß der 12, 16 und 20).

§. 61. Eine Zahl, die mehrere Maaße hat, heißt ein gemeinschaftlicher Dividuus derselben, (30 ist der gemeinschaftliche Dividuus

duus der 15, 10, 6, 5, 3 und 2). Der kleinste gemeinschaftliche Dividuus verschiedener Maaße ist die kleinste der Zahlen, in denen sie alle aufgehen, (30 ist auch der kleinste gemeinschaftliche Dividuus der vorgenannten Maaße, größere Dividuen derselben sind 60, 90 und andere).

§. 62. Alle Dividuen der 2 nennt man gerade, alle andere ungerade Zahlen, (2, 4, 6, 8 u. s. w. sind gerade, 1, 3, 5 u. s. w. ungerade).

§. 63. Jede Zahl, die kein anderes Maaß hat, als sich selbst und die 1, wird eine Primzahl (ursprüngliche, einfache) genannt, (1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 57, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 91, 97 sind Primzahlen); jede Zahl, die auch Dividuus anderer ist, heißt eine mehrfache (zusammengesetzte) Zahl. Verschiedene Zahlen, die für sich keine Primzahlen zu sein brauchen, heißen doch Primzahlen zu einander, wenn sie außer der 1 kein gemeinschaftliches Maaß haben, (3 und 4, 3 und 8, 5 und 6 sind Primzahlen zu einander).

§. 64. Wenn man einen durch größere Zahlen ausgedrückten Bruch vermittelst der Division seiner beiden Glieder durch ihr größtes gemeinschaftliches Maaß in den möglichst kleinen Zahlen ausdrückt, so heißt dies: den Bruch heben; ($\frac{24}{30}$ wird durch das größte gemeinschaftliche Maaß 6 gehoben = $\frac{4}{5}$).

§. 65. Brüche zu einander addiren heißt: ihre einzelnen Werthe in eine Summe vereinigen, (wodurch häufig unechte und uneigentliche Brüche, also auch ganze Zahlen entstehen: $\frac{3}{7} + \frac{1}{7} + \frac{4}{7} + \frac{6}{7} = \frac{14}{7} = 2$).

§. 66. Einen Bruch zu einer ganzen Zahl addiren, ($5 + \frac{2}{3}$) heißt: beide in eine Summe vereinigen, (welche ein unechter Bruch sein muß, §. 56, $5 + \frac{2}{3} = \frac{15}{3} + \frac{2}{3} = \frac{17}{3}$). Die Anzeige einer solchen Addition (wobei gewöhnlich das Zeichen + ausgelassen wird: $5\frac{2}{3}$) heißt eine gemischte Zahl, und die Ausführung derselben wird ihre Einrichtung genannt ($\frac{17}{3}$).

§. 67. Brüche von einander subtrahiren heißt: von dem größern Werthe des einen den kleinern, und als Theil in demselben enthaltenen, Werth, des andern Bruches wegnehmen, so, daß natürlich ein auch kleinerer Bruch als Differenz übrig bleibt, ($\frac{6}{7} - \frac{2}{7} = \frac{4}{7}$).

§. 68. Einen Bruch von einer ganzen Zahl abziehen, heißt nichts anderes, als: seinen Werth, der in der Eins enthalten ist, von dieser hinwegnehmen; denn wenn die gegebene Zahl größer als 1 ist, so wird er doch nur von 1 subtrahirt, und die andern in der Zahl enthaltenen Einheiten bleiben zusammen als ganze Zahl übrig, zu welcher noch ein Bruch als Rest von der 1 hinzukommt ($7 - \frac{3}{5} = 6\frac{2}{5}$).

§. 69. Einen Bruch mit einer ganzen Zahl multipliziren heißt: den Werth des

des Multiplikandus soviel Mal nehmen, wie die ganze Zahl 1 enthält, (wodurch gewöhnlich ein unechter Bruch als Produkt entsteht: $\frac{4}{7} \times 3 = \frac{12}{7}$).

§. 70. Eine ganze Zahl mit einem Bruche multipliziren, heißt: (nicht die ganze gegebene Zahl, sondern nur) den sovielsten Theil derselben, wie der Nenner des Multiplikators ausdrückt, soviel Mal nehmen, wie der Zähler des Multiplikators Eins enthält, ($8 \times \frac{3}{4}$, d. h. nicht 8×3, sondern $\frac{8}{4} \times 3$); oder: den Multiplikandus (nicht ein ganzes Mal, nicht 8×1, sondern nur) soviel Mal nehmen, wie der Werth des Multiplikators von 1 ausmacht, (also nur theilweise, wodurch daher das Produkt immer eine kleinere Zahl als der Multiplikandus wird: $8 \times \frac{3}{4} = \frac{24}{4} = 6$).

§. 71. Zwei Brüche mit einander multipliziren, heißt: (nicht den ganzen Werth des Multiplikandus, nicht alle die Theile von Eins, die er enthält, sondern nur) von dem Werthe des Multiplikandus solchen Theil, wie der Nenner des Multiplikators von Eins anzeigt, sovielmal nehmen, wie der Zähler des Multiplikators 1 enthält. ($\frac{8}{9} \times \frac{3}{4}$ nicht: $\frac{8}{9} \times 3$, sondern $\frac{1}{4}$ von $\frac{8}{9}$ d. i. $\frac{2}{9} \times 3$. Dies erfordert also erst eine Division des Multiplikandus mit dem Nenner des Multiplikators, und dann die Multiplikation des Antheils mit dem Zähler des Multiplikators).

§. 72. Einen Bruch durch eine ganze Zahl

Zahl dividiren, heißt: den Werth des Bruches in so viel gleiche Theile zerlegen, wie der Divisor 1 enthält, ($\frac{6}{7} : 3 = \frac{2}{7}$). Die bloße Anzeige einer solchen Division $\frac{\frac{6}{7}}{3}$ heißt ein gebrochener Bruch, der durch die Ausführung der Division desselben in einen einfachen, echten Bruch verwandelt wird.

§. 73. Eine ganze Zahl durch einen Bruch dividiren ($12 : \frac{3}{4}$, heißt nicht: den Dividendus bloß in gleiche Theile zerlegen, wie bei der Division mit einer ganzen Zahl, denn der Divisor selbst enthält ja schon eine Division, die noch nicht ausgeführt werden konnte, sonst wäre der jetzige Divisor $\frac{3}{4}$, eine 4 Mal kleinere Zahl als sein Zähler 3, und $\frac{1}{3}$ des Dividendus ist also um 4 Mal zu klein; die sogenannte Division durch einen Bruch $\frac{3}{4}$, erfordert also auch hauptsächlich eine Multiplikation des 4 Mal zu kleinen Antheils, der durch einen 4 Mal zu großen Divisor 3 entsteht, also es) heißt: den Antheil des Dividendus, der durch Zerlegung desselben in so viel gleiche Theile, wie der Zähler des Divisors 1 enthält, entstanden ist, soviel Mal vergrößern, wie der Nenner des Divisors 1 enthält, (wodurch immer eine größere Zahl als der sogenannte Dividendus entstehen muß, $12 : \frac{3}{4} = \frac{12}{3} \times 4 = 16$).

§. 74. Einen Bruch durch einen andern dividiren heißt (daher auch): den Antheil aus dem Werthe des Dividendus, der durch Theilung desselben mit dem Zähler des Divisors

(§. 72.)

(§. 72.) entsteht, mit dem Nenner des Divisors multipliziren, (wodurch auch immer ein echter oder unechter Bruch von größerem Werthe als der Dividendus gefunden werden muß; $\frac{2}{3} : \frac{4}{5} = \frac{\frac{2}{3}}{4} \times 5 = \frac{2}{12} \times 5 = \frac{10}{12} = \frac{5}{6}$; $\frac{7}{8} : \frac{2}{9} = \frac{7}{16} \times 9 = \frac{63}{16} = 3\frac{15}{16}$).

§. 75. Jeder Bruch, dessen Nenner die Zahl Zehn zum Maaß hat (§. 59.), heißt ein Dezimalbruch; ($\frac{1}{10}$, $\frac{6}{100}$, $\frac{8}{1000}$ u. s. w.) Dieselben gewähren den Vortheil, daß man sie ohne Niederschreibung der Nenner bloß durch die Stellen der Zähler genau bezeichnen kann, indem in einer Reihe von Ziffern, worin eine Stelle als die der ursprünglichen Einer feststeht, die nächste Stelle rechts neben derselben immer Einheiten von Zehntheilen, die darauf folgende Hunderttheile, u. s. w. immer zehnmal kleinere Einheiten bedeutet. (24,16807 heißt, wenn die durch das Komma bezeichnete Stelle als die der ursprünglichen Einer angenommen ist: 24 Ganze, 1 Zehntheil, 6 Hunderttheile, 8 Tausendtheile, keine Zehntausendtheile, 7 Milliontheile). Die Stellen, welche innerhalb der Reihe mit keinen Zählern besetzt sind, sind auch mit Nullen ausgefüllt, wie bey den ganzen Zahlen, damit die weiter zur Rechten folgenden Zähler mit keinem andern Nenner verbunden werden, als sie haben sollen. Auch dann, wenn solche Brüche ohne Ganze dastehen, ist, um allen Irrthum

thum zu vermeiden, die Stelle der Einer mit einer o bezeichnet. (0,39 heißt: keine Ganze, 3 Zehntel, 9 Hunderttel; 0,004006 heißt: 4 Tausendtel, 6 Milliontel). Da diese Zähler wie ganze Zahlen von kleinen Einheiten betrachtet werden können, so lassen sie sich auch überall wie solche behandeln, und die Erklärungen der verschiedenen Verrichtungen mit ganzen Zahlen gelten auch bei diesen.

IV.

Von verschiedenen Potenzen oder Dignitäten der Zahlen.

§. 76. Wenn irgend eine Zahl mit sich selbst multiplizirt wird (4×4), so nennt man das dadurch entstehende Produkt (16) die 2te Potenz oder 2te Dignität, den 2ten Grad jener Zahl. Wird dieses Produkt nochmals mit der ersten Zahl (4) multiplizirt, so entsteht dadurch ihre 3te Potenz (64), und so durch fernere Multiplikation irgend einer Potenz einer Zahl mit der Zahl selbst immer eine höhere Potenz derselben; ihre niedrigste oder 1ste Potenz ist sie selbst oder ihr Produkt mit 1. Die bloße Anzeige der höhern Potenzen geschieht durch eine kleine Zahl, die der Exponent oder Dignitätszeiger genannt wird, oben zur Rechten der ursprünglichen Zahl, ($4^2 = 16$, $4^3 = 64$, $4^4 = 256$). Die 2te Potenz wird auch das Quadrat der ersten Zahl, und die 3te Potenz ihr Würfel (Cubus) genannt, (welche Ausdrücke sich durch

die

die Geometrie werden erklären lassen). Die 1ste Potenz jeder Zahl, d. h. die Zahl selbst, wird auch die Wurzel (Radix) aller ihrer Potenzen genannt, und zwar in Rücksicht auf die 2te Potenz heißt sie die Quadratwurzel, in Rücksicht auf die 3te die Cubikwurzel, in Rücksicht auf die folgenden die 4te, 5te Wurzel u. s. w., welches durch Vorsetzung eines r mit einer darin stehenden kleinen Zahl, die der Exponent der Wurzel heißt, angedeutet wird; ($\overset{2}{r}\ 16 = 4$, $\overset{3}{r}\ 64 = 4$, $\overset{4}{r}\ 625 = 5$).

§. 77. Eine Zahl auf eine verlangte Weise potenziren heißt also: die Eins so viel Mal nach einander mit dieser Zahl multipliziren, wie viel Mal der gegebene Exponent 1 enthält; ($2^5 = 32$, $\frac{2}{3}^3 = \frac{8}{27}$).

§. 78. Aus einer gegebenen Zahl die bestimmte Wurzel ausziehen, heißt: untersuchen, welche die Zahl sey, die, zu der bestimmten Potenz erhoben, die gegebene Zahl hervorbrächte; als Cubikwurzel der 27 findet man die 3, als Quadratwurzel der $\frac{9}{16}$ die $\frac{3}{4}$). Wenn sich die verlangte Wurzel genau oder vollständig finden läßt, so heißt die gegebene Zahl eine vollkommene Potenz; ist dieses nicht der Fall, so kann man doch der Wurzel in Brüchen so nahe kommen, wie man es nöthig findet.

V.

V.

Von Verhältnissen, Proportionen, Progressionen und Logarithmen.

§. 79. Die Verbindung zweier Zahlen mit einander, daß die eine in der andern gewisse Mal enthalten ist, nennt man das geometrische Verhältniß derselben. Die beiden Zahlen selbst heißen die Glieder des Verhältnisses, und eine Zahl, welche anzeigt, wie viel Mal die eine in der andern (eigentlich die 2te in der 1sten) enthalten ist, heißt der Verhältnißzeiger oder Exponent. (12 : 4 = 3, d. h. 3 ist der Exponent des Verhältnisses der 12 zu 4; man sagt aber auch: 3 ist der Verhältnißzeiger der 4 zu 12, welches wohl eigentlich $\frac{1}{3}$ ist).

§. 80. Wenn 2 Verhältnisse gleiche Exponenten haben, so nennt man diese ihre Gleichheit eine Proportion, und sagt von den 4 Gliedern derselben, daß sie mit einander proportional sind, (15 : 5 = 12 : 4). Das 2te und 3te Glied heißen mittlere, das 1ste und 4te aber äußere Glieder; das 1ste und 3te als Vorderglieder, und das 2te und 4te als Hinterglieder beider Verhältnisse heißen ähnlichliegende (homologe) Glieder.

§. 81. Eine Proportion, deren mittlere Glieder einander gleich sind, (3 : 12 = 12 : 48) heißt eine stetige, jede andere aber, deren mittlere Glieder ungleich sind, eine abgesonderte

derte Proportion. (Eine stetige schreibt man auch ∺ 3 : 12 : 48).

§. 82. Eine Reihe von Zahlen, deren jede 3 auf einander folgende Glieder in einer stetigen geometrischen Proportion stehen, (∺ 3 : 6 : 12 : 24 : 48 u. s. w.) heißt eine geometrische Progression. Eine solche Progression, deren Glieder von der ersten an bis zur letzten an Größe zunehmen, heißt eine steigende oder wachsende, eine solche, deren Glieder kleiner werden, eine fallende oder abnehmende Progression (∺ 40 : 20 : 10 : 5).

§. 83. Die Verbindung zweier Zahlen mit einander, daß die eine um gewisse Einheiten größer ist als die andere, heißt ihr arithmetisches Verhältniß (8 — 5), ihre Differenz (3) ist ihr Verhältnißzeiger, und die Gleichheit zweier solcher Verhältnisse heißt eine arithmetische Proportion (8 — 5 = 7 — 4), welche auch stetig seyn kann (÷ 8 — 5 — 2). Eine Reihe Zahlen, deren jede mit der vorhergehenden und folgenden eine stetige arithmetische Proportion ausmacht, heißt eine arithmetische Progression, welche auch steigend oder fallend seyn kann (÷ 1 — 5 — 9 — 13, ÷ 15 — 12 — 9 — 6 — 3 — 0).

§. 84. Wenn man irgend eine mit 1 anfangende geometrische Progression und eine mit 0 anfangende arithmetische zusammenstellt,

(∺ 1 : 10 : 100 : 1000 : 10 000 : 100 000
÷ 0 — 1 — 2 — 3 — 4 — 5),

so

so nennt man jedes Glied der letztern den Logarithmus (Gliedeszeiger) des mit ihm verbundenen Gliedes der geometrischen Progression in der gegenwärtigen Verbindung oder in dem angenommenen logarithmischen System. (Logarith. 10 = 1, Log. 10,000 = 4. Man kann auch Progressionen von andern Exponenten und Differenzen annehmen, aber obiges System ist das gewöhnliche). Die Logarithmen der zwischen den angegebenen Gliedern befindlichen Zahlen (2 bis 9, 11 bis 19 u. s. w.) müssen dann erst, als zwischen den angegebenen Logarithmen zu findende Zahlen gesucht werden, (und enthalten alle im obigen System Brüche, z. B. Log. 3 = 0,477121; Log. 199 = 2,298253). Die beiden ersten Glieder der angenommenen geometrischen Progression (1 : 10) nennt man das Grundverhältniß, und das Hinterglied desselben (10) die Grundzahl des Systems, (welche in dem gewöhnlichen System den Logarithmus 1 hat). Der Nutzen der Logarithmen ist bei großen Rechnungen bedeutend, deshalb giebt es zu größerer Bequemlichkeit mehrere gedruckte Tabellen, in denen die Logarithmen aller einzelnen Zahlen bis zu einer ansehnlichen Höhe ausgerechnet sind, gewöhnlich nach der Grundzahl 10. Die in jedem Logarithmus vor den Decimalbrüchen stehende ganze Zahl, an welcher man erkennt, hinter welchem Gliede der zum Grunde liegenden Progression sich die gedachte Zahl befindet, wird die Kennziffer oder Charakteristik des

Lo-

Logarithmus genannt; (2 ist die Kennziffer der 100, 3 die Charakteristik der 1000).

VI.

Von benannten Zahlen.

§. 85. Eine Zahl, die, auf wirkliche Fälle des Lebens angewendet, gewisse Dinge bedeutet (5 Thaler), heißt eine benannte Zahl, wogegen die bloßen Zahlen unbenannte heißen (5, 7, 12).

§. 86. Eine Zahl von einer Benennung auf eine andre reduciren, heißt entweder: sie mit einer Zahl multipliciren, welche anzeigt, wieviel kleinere Dinge derselben Gattung in ihrer Einheit vom höheren Namen enthalten sind (1 Thlr. = 24 Groschen, daher 5 Thlr. × 24 = 120 Gr.); oder: sie mit einer Zahl dividiren, welche aussagt, wie viel Dinge ihrer niedrigen Benennung dazu gehören, um erst eine Einheit von höherer Art auszumachen (32 Loth = 1 Pfund, daher 96 Loth : 32 = 3 Pfund).

§. 87. Wenn mehrere Zahlen Dinge von einer Art bedeuten (5 Gr., 7 Gr., 6 Gr.), so heißen sie gleichbenannte, wenn sie aber verschiedene Arten, jedoch derselben Gattung, bedeuten, so heißen sie ungleichbenannte Zahlen, die jedoch auf einerley Benennung von der kleinsten Art reduzirt werden können.

§. 88. Wenn verschiedene Benennungen zwei-

zweier Zahlen in einer solchen Verbindung mit einander stehen, daß die Vergrößerung oder Verkleinerung der Zahl der einen auch eine ebensolche Veränderung der andern bewirken muß, so heißt ihr sogenanntes Verhältniß ein gerades oder direktes Verhältniß. (Z. B. 5 Pfund Waare haben einen Preis von 7 Thlr., doppelt so viel Pfund müssen auch doppelt so viel Thaler, oder halb soviel Pfund auch halb soviel Thaler gelten).

§. 89. Wenn verschiedene Benennungen zweier Zahlen sich so gegeneinander verhalten, daß die Vergrößerung der Zahl der einen das Gegentheil, die Verkleinerung der Zahl der andern, und umgekehrt die Verkleinerung jener eine Vergrößerung dieser erfordert, so sagt man: sie stehen in einem umgekehrten, indirekten Verhältniß; (ein Tuch hat 10 Viertel Breite, und man braucht davon 3 Ellen Länge zum Kleide; wenn aber das Zeug nur halb soviel Breite hat, so braucht man doppelt so viel von seiner Länge).

§. 90. Wenn 2 Benennungen ein ebensolches direktes Verhältniß gegeneinander haben wie 2 andere ebensolche Benennungen, so sagt man: sie machen alle 4 zusammen eine richtige Proportion aus.

§. 91. Wenn ein Paar Benennungen in demselben umgekehrten Verhältnisse miteinander stehen wie ein Paar andere ebensolche Benennungen, so sagt man: sie stehen in einer umgekehrten Proportion.

§. 92. Eine Rechnungsart, durch welche man zu 3 gegebenen Gliedern einer Proportion das 4te findet, heißt die Regel de tri. Eine zusammengesetzte Proportionsrechnung, wird Regula multiplex genannt, und zwar Regula quinque, wenn zu 5 gegebenen Gliedern ein 6tes gefunden wird; auf gleiche Weise Regula septem, novem u. s. w.

§. 93. Eine Rechnungsart, wodurch man verschiedene Benennungen, die in einem entfernten, aber bekannten Verhältnisse stehen, gegenseitig in einander verwandelt, (z. B. Dukaten in Gulden) nennt man die Reduktionsrechnung.

§. 94. Eine Rechnungsart, wodurch ein Ganzes in (ungleiche) Theile nach angegebenen Verhältnissen zerlegt wird, heißt die Repartitions- oder Gesellschafts-, Socialrechnung.

§. 95. Eine Rechnungsart, wodurch ein Verhältniß zwischen einer Mischung und ihren Bestandtheilen, oder zwischen diesen unter einander durch mehrere angegebene Verhältnisse derselben gefunden wird, heißt die Vermischungsrechnung.

§. 96. Eine Rechnungsart, wodurch ein Verhältniß zwischen einem Capital und dessen Zinsen oder ihrem Zinsfuße, d. h. wieviel Zinsen jährlich für ein Kapital, welches hundert beträgt, (pro Cent) gezahlt werden, aus andern gegebenen Verhältnissen derselben gefunden

funden wird, heißt die Zins-, Interessen- oder Procent-Rechnung.

Zweiter Abschnitt.

(Grund-, Lehr- und Folge-) Sätze.

I.

Von dem Wesen und den allgemeinen Verbindungen der Zahlen.

§. 97. Jede Zahl enthält irgend eine Einheit gewissemal (einmal oder mehrmal) in sich.

§. 98. Jede Zahl ist ein Vielfaches ihrer Einheit, (Vier das Vierfache der Eins, Vierzig das Vierfache der Zehn).

§. 99. Jede Einheit ist ein aliquoter Theil, ein Bruch jeder ihrer und höherer Zahlen, (1 ist $\frac{1}{4}$ der 4, $\frac{1}{100}$ der 100; 10 000 ist $\frac{1}{7}$ der 70 000).

§. 100. In einer nach der gewöhnlichen Weise zu zählen (nach dem Dezimal-System) zusammengesetzten Zahl ist jede Einheit das Zehnfache der Einheit in der ihr zur Rechten nächstvorhergehenden Stelle, (das Hundertfache der Einheit in der vorvorigen Stelle u. s. w., und dagegen ist sie wieder ein Zehntheil der Einheit in der ihr zur Linken nächstfolgenden Stelle, (ein Hunderttheil der Einheit in der zweiten ihr folgenden Stelle, u. s. w. von jeder

noch

nachfolgenden Einheit der Dezimalbruch von einem Nenner mit so vielen Nullen, um wieviel Stellen dieselbe von ihr entfernt ist.

§. 101. Jede Ziffer in irgend einer Stelle einer zusammengesetzten Zahl hat den zehnfachen Werth derselben Ziffer in der vorigen, und ein Zehntheil des Werths derselben Ziffer in der folgenden Stelle u. s. w. (wie im vorigen §.; z. B. 444, Vierzig ist das Zehnfache der Vier und ein Zehntheil der Vierhundert).

§. 102. Wenn die Zahl der Einheiten in irgend einer Stelle bis auf Zehn vergrößert wird, so kann sie nicht in derselben Stelle bleiben, sondern wird Eins in der folgenden Stelle zur Linken.

§. 103. Man kann beim Aussprechen einer mehrziffrigen Zahl jede Stelle als die der Einer annehmen, worauf dann die ganze Zahl nach den Einheiten dieser Stelle benannt wird, und die ihr zur Rechten befindlichen Stellen Dezimalbrüche derselben werden. (5423 könnte auch ausgesprochen werden: $542\frac{3}{10}$ Zehner, oder: $54\frac{2}{10}$ und $\frac{3}{100}$ von Hunderten, oder $5\frac{4}{10}$ und $\frac{2}{100}$ und $\frac{3}{1000}$ von Tausenden).

II.

Von den vier Grund-Rechnungsarten (Species).

§. 104. Nur gleichartige Größen (Zahlen von gleicher Benennung, und auch unbenannte Zahlen nur von gleichen Einheiten) können zusammen gezählt (und von einander abgezogen werden. (Eine Reihe von Größen, die verschiedene Arten, z. B. Thaler, Groschen und Pfennige enthält, wird nur uneigentlich eine Summe genannt).

§. 105. Durch Addition zweier oder mehrerer Zahlen wird eine neue gefunden, welche allen den Posten zusammen gleich ist.

§. 106. Die Summe gewisser Zahlen ist immer dieselbe, wenn auch die Folge, in welcher man sie zusammenzählt, noch so verschieden sein kann. (Man kann die letzte zuerst und die erste zuletzt, oder erst einige zusammen, und zu ihrer Summe noch die andern zuzählen).

§. 107. Eine sogenannte Addition mehrerer Nullen giebt immer eine Summe, die Nichts ist. ($0 + 0 + 0 = 0$).

§. 108. Wenn man zu einer Zahl oder Summe mehrerer Zahlen eine oder mehrere Nullen addirt, so bleibt dieselbe nur so groß wie vorher. ($8 + 0 + 0 = 8$).

§. 109. Folgende Sätze enthalten die richtigen Summen jeder zwei Zahlen von einer Ziffer; die Stelle worin diese Ziffern in zusammengesetzten Posten stehen, bestimmen auch den Werth, welchen ihre Summe erhalten muß.

$1+1=2$	$4+2=6$	$8+3=11$	$8+5=13$
$2+1=3$	$5+2=7$	$9+3=12$	$9+5=14$
$3+1=4$	$6+2=8$	$4+4=8$	$6+6=12$
$4+1=5$	$7+2=9$	$5+4=9$	$7+6=13$
$5+1=6$	$8+2=10$	$6+4=10$	$8+6=14$
$6+1=7$	$9+2=11$	$7+4=11$	$9+6=15$
$7+1=8$	$3+3=6$	$8+4=12$	$7+7=14$
$8+1=9$	$4+3=7$	$9+4=13$	$8+7=15$
$9+1=10$	$5+3=8$	$5+5=10$	$9+7=16$
$2+2=4$	$6+3=9$	$6+5=11$	$8+8=16$
$3+2=5$	$7+3=10$	$7+5=12$	$8+9=17$

$$9+9=18.$$

(7 Zehner + 6 Zehner sind dann = 13 Zehnern oder = 3 Zehnern + 1 Hundert).

§. 110. Nur gleichartige Größen können von einander subtrahirt werden.

§. 111. Unter 2 gegebenen Zahlen kann nur die kleinere von der größern abgezogen werden.

§. 112. Durch Subtraktion einer Zahl von der andern wird der Unterschied derselben gefunden.

§. 113. Die Additions-Sätze des §. 109. geben auch die richtigen Differenzen jeder zwei Zahlen von einer Ziffer, wie auch jeder einziffrigen Zahl von zweyziffrigen bis Achtzehn; (weiter die Differenzen zu wissen, ist nicht nöthig); wenn man nämlich eine der addirten Zahlen von der dabei stehenden Summe subtrahirt, so ist die andere addirte Zahl die Differenz jener beiden.

$3-2=1$, $3-1=2$, $17-8=9$, $17-9=8$ u. s. w.

§. 114. Wenn von irgend einer Zahl oder Summe eine oder mehrere Nullen subtrahirt werden, so bleibt dieselbe noch ebensogroß wie vorher (7 — 0 = 7).

§. 115. Addition und Subtraktion sind einander genau entgegengesetzt.

§. 116. Wenn zu einer Zahl eine andere zugezählt, und dieselbe wieder von ihrer Summe abgezogen wird, so bleibt die erste Zahl dadurch unverändert (8 + 4 = 12; 12 — 4 = 8).

§. 117. Wenn man eine Zahl hat, von welcher man weiß, daß sie die Summe mehrerer anderer ist, und man subtrahirt von ihr diese außer einer, so muß von der Summe eine Zahl übrig bleiben, die der nicht abgezogenen gleich ist. (Probe der Addition.)

§. 118. Wenn man die Differenz zweier Zahlen zu der kleinern unter ihnen addirt, so wird die Summe der größern unter ihnen gleich. (Probe der Subtraktion.)

§. 119. In jedem Produkte zweier Zahlen ist der gewesene Multiplikandus soviel Mal enthalten, wie der Multiplikans 1 enthielt.

§. 120. In jedem Produkte ist der gewesene Multiplikans soviel Mal enthalten, wie im Multiplikandus 1 enthalten war.

§. 121. Dieselben Faktoren geben immer dasselbe Produkt, welchen derselben man auch zum Multiplikandus und welchen zum Multiplikans annehmen mag (4 × 3 = 12 und 3 × 4 = 12).

§. 122. Jede Zahl bleibt, mit 1 multiplicirt, unverändert (3 × 1 = 3; 1 × 1 = 1.)

§. 123.

§. 123. Wenn man in folgender Tabelle,

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	64	63	72	81

welche die Pythagorische Tafel (das Ein mal Eins) genannt wird, von irgend einer Ziffer der obersten Reihe in der Columne von oben hinunter geht, und ebenfalls von einer Ziffer der äußersten Columne linker Hand in derselben Queer-Reihe nach der rechten Hand zu soweit fortgeht, bis man auf das Viereck kommt, welches jener Columne von oben und dieser Queerreihe gemeinschaftlich angehört, so findet man in diesem Viereck das Produkt der beiden einziffrigen Zahlen, von welchen man oben und linker Hand ausgegangen ist.

§. 124. Wenn einer der Faktoren oder beide aus mehrern Ziffern zusammengesetzt sind, so ist die Summe aller einzelnen Produkte, die aus jeder Ziffer des Multiplikandus und jeder des Multiplikans den Werthen ihrer verschiedenen Einheiten gemäß entstehen, das Produkt der ganzen Faktoren (43 × 25 giebt die einzelnen Faktoren

und

Produkte: $3 \times 5 = 15$, 4 Zehner $\times 5 = 20$ Zehnern $= 200$, 3×2 Zehnern, d. h. $3 \times 20 = 60$, $40 \times 20 = 800$, also ist $15 + 200 + 60 + 800 = 1075$ das richtige Produkt der beiden ganzen Faktoren).

§. 125. Wenn einer der Faktoren oder beide aus bloßen Nullen bestehen, so wird das Produkt immer Nichts, (möge auch der andere Faktor eine noch so große Zahl seyn; $000 \times 9 = 000$; $384 \times 0 = 000$).

§. 126. Wenn einer der Faktoren oder beide neben den Zahlziffern zur Rechten noch Nullen haben, so hat das Produkt außer den Ziffern, die aus sämmtlichen Zahlziffern entstanden sind, rechter Hand noch soviel Nullen, wie beide Faktoren zusammen. ($400 \times 30 = 12\,000$; $500 \times 4000 = 20\,00000$).

§. 127. Jeder Quotient einer Division ist ein Bruch des Dividendus, und zwar der sovielste Theil desselben, wieviel Mal der Divisor 1 enthält ($12 : 3 = 4$, $4 = \frac{1}{3}$ der 12).

§. 128. Jeder Divisor ist der sovielste Theil des Dividendus, wieviel Mal der Quotient 1 enthält ($12 : 3 = 4$, $3 = \frac{1}{4}$ von 12).

§. 129. Wenn die Division einer ganzen Zahl mit einer andern aufgeht, so ist gewiß der Dividendus ein Produkt zweier ganzer Zahlen ($35 : 7 = 5$; 35 ist ein Produkt der 7 und 5).

§. 130. Jede Zahl in der Pythagorischen Tafel (§. 123), wenn sie mit der gerade über ihr stehenden Zahl in der obersten Queerreihe dividirt wird, muß die Zahl zum Antheil geben, welche

ihr

ihr zur linken Seite in der äußersten Columne von oben hinunter befindlich ist (28 : 7 = 4; 81 : 9 = 9).

§. 131. Wenn eine Division aufgeht, so zeigt der Divisor an, wieviel Mal der Antheil in dem Dividendus enthalten sei, und der Antheil, der gleichfalls als Divisor gebraucht werden kann, zeigt an, wieviel Mal der erste Divisor im Dividendus enthalten sei (7 in 35 ist 5 Mal, und 5 in 35 ist 7 Mal enthalten).

§. 132. Wieviel Mal eine Zahl in einer andern enthalten ist, soviel Mal kann sie von derselben subtrahirt werden (4 in 13 ist 3 Mal, 13 — 4 = 9, 9 — 4 = 5, 5 — 4 = 1).

§. 133. Wenn eine Zahl, gewisse Mal von einer andern abgezogen, keinen Rest läßt, so ist sie genau ebensoviel Mal in derselben enthalten (8 — 4 = 4, 4 — 4 = 0, also 4 in 8 genau 2 Mal).

§. 134. Jede Zahl, wenn sie mit sich selbst dividirt wird, giebt 1 zum Antheil (7 : 7 = 1; 1 : 1 = 1).

§. 135. Jede Zahl, und auch Null, bleibt bei einer sogenannten Division mit 1 unverändert (8 : 1 = 8, 0 : 1 = 0).

§. 136. Jede Null bleibt bei einer sogenannten Division durch irgend eine Zahl immer 0 (0 : 7 = 0).

§. 137. Wenn irgend eine Zahl mit einer andern Zahl derselben, wenn auch noch so hohen, Einheiten dividirt wird, so ist der daraus hervorgehende Antheil immer eine Zahl der einfachfachsten (ursprünglichen) Einheiten. (8000 : 4000 = 2 Einern).

§. 138. Wenn eine Zahl höherer Einheiten mit einer Zahl der ursprünglichen Einheiten dividirt wird, so ist der Antheil eine Zahl solcher größern Einheiten, wie die des Dividendus sind (8000 : 4 = 2000).

§. 139. Wenn eine Zahl größerer Einheiten mit einer Zahl von Einheiten irgend eines geringeren Werthes dividirt wird, so erhält der Antheil den Werth der sovielsten Stelle, um wieviel Stellen die Einheiten des Dividendus von denen des Divisors entfernt sind (8000 : 40 = 200, 8000 : 400 = 20).

§. 140. Wenn eine mehrziffrige Zahl mit einer andern mehrziffrigen dividirt wird, so müssen alle Theile des Divisors mit ihren verschiedenen Einheitswerthen soviel Mal in dem ganzen Dividendus enthalten sein, wieviel Mal die ursprüngliche Einheit in dem ganzen Antheil enthalten ist; und wiederum alle Theile des Quotienten müssen sovielmal im Dividendus enthalten sein, wie die ursprüngliche Einheit im ganzen Divisor (10368 : 324 = 32, hier sind im Dividendus enthalten : $300 \times 32 + 20 \times 32 + 4 \times 32$, und wiederum: $30 \times 324 + 2 \times 324$.

§. 141. Wenn ein Dividendus und sein Divisor zur Rechten gleichviel Nullen enthalten, so kann man dieselben noch vor der Ausführung der Theilung gegen einander aufheben, d. h. weglassen), und der darnach erhaltene Antheil muß doch derselbe sein, der aus der Division jener un-

ver-

verkürzten Zahlen hervorgeht. (1200 : 400 = 3; 12 : 4 = 3).

§. 142. Jede kleinere Zahl, die mit einer größern Zahl derselben Einheiten dividirt wird, kann nur einen (echten) Bruch zum Antheil geben (3 : 4 = $\frac{3}{4}$; 50 : 70 = $\frac{50}{70}$ = $\frac{5}{7}$).

§. 143. Wenn bei der Theilung einer größern Zahl mit einer kleinern die Division nicht aufgeht, so erhält der Antheil neben der gefundenen ganzen Zahl noch einen Bruch, der den Rest des Dividendus zum Zähler, und den Divisor zum Nenner hat, wird also eine gemischte Zahl (14 : 3 = 4$\frac{2}{3}$).

§. 144. Multiplikation und Division sind einander genau entgegengesetzt.

§. 145. Wenn eine Zahl mit einer andern multiplizirt, und das Product wieder mit derselben Zahl dividirt wird, so bleibt die erste Zahl zuletzt unverändert (6 × 3 = 18, 18 : 3 = 6).

§. 146. Wenn man irgend ein Produkt mit einem seiner Faktoren dividirt, so muß man den andern Faktor finden (Probe der Multiplikation).

§. 147. Wenn man den Antheil irgend einer Division mit dem Divisor multiplizirt, so muß man den Dividendus finden (Probe der Division).

III.

Von den Brüchen.

§. 148. Jeder Bruch ist ein solches Vielfaches eines durch den Nenner bestimmten aliquoquoten Theils der Einheit, wieviel der Zähler als ganze Zahl betrachtet (kleinere) Einheiten enthält ($\frac{3}{4}$ ist ein Dreifaches des vierten Theils der Einheit; $\frac{7}{3}$ ist ein Siebenfaches des dritten Theils der Einheit).

149. Jeder Bruch, dessen Zähler dem Nenner gleich ist, beträgt genau soviel wie 1 ($\frac{4}{4} = 1$, $\frac{99}{99} = 1$).

§. 150. Jeder Bruch, dessen Zähler größer ist als der Nenner, enthält soviel Mal den Werth der 1, wievielmal der Nenner in dem Zähler (als ganze Zahlen betrachtet) enthalten ist ($\frac{12}{3} = 4 \times 1$, $\frac{9}{4} = 2\frac{1}{4} \times 1$).

§. 151. Wenn man eine ganze Zahl mit einer andern multiplizirt, und diesem Produkte denselben Multiplikans zum Nenner giebt, so ist der Werth des dadurch entstandenen unechten Bruchs gleich der ersten ganzen Zahl ($4 = \frac{4 \times 3}{3} = \frac{12}{3}$).

§. 152. Jeder (unechte) Bruch, dessen Nenner 1 ist, gleicht am Werthe seinem bloßen Zähler als ganzer Zahl ($\frac{4}{1} = 4$).

§. 153. Der Werth jedes Bruchs wird durch Vergrößerung seines Zählers (und Beibehaltung des vorigen Nenners) gleichmäßig vergrößert ($\frac{4}{7} < \frac{6}{7}$, und zwar ist letzterer um $\frac{1}{2}$ Mal größer als der erste; $\frac{6}{7}$ ist doppelt so groß wie $\frac{3}{7}$.

§. 154. In jemehr gleiche Theile die Einheit getheilt wird, desto kleiner werden die Theile selbst ($\frac{1}{6} < \frac{1}{4}$).

§. 155.

§. 155. Der Werth jedes Bruchs wird durch Vergrößerung des Nenners (mit Beibehaltung des Zählers) gleichmäßig verkleinert ($\frac{5}{24}$ ist nur der dritte Theil von $\frac{5}{8}$).

§. 156. Der Werth jedes Bruches wird durch Verkleinerung des Zählers (mit Beibehaltung des Nenners) gleichmäßig vermindert ($\frac{6}{7}$ ist doppelt so groß wie $\frac{3}{7}$).

§. 157. Der Werth jedes Bruchs wird durch Verkleinerung des Nenners (mit Beibehaltung des Zählers) gleichmäßig vergrößert ($\frac{5}{6}$ ist dreimal so groß wie $\frac{5}{18}$).

§. 158. Der Werth jedes Bruchs bleibt unverändert, wenn man seinen Nenner sowohl wie seinen Zähler mit gleichen Zahlen multiplizirt $\left(\frac{3}{4} = \frac{3 \times 7}{4 \times 7} = \frac{21}{28}\right)$.

§. 159. Der Werth jedes Bruches bleibt unverändert, wenn sein Nenner sowohl wie sein Zähler durch gleiche Zahlen dividirt wird $\left(\frac{20}{24} = \frac{20 : 4}{24 : 4} = \frac{5}{6}\right)$.

§. 160. Der Werth jedes Bruches bleibt unverändert, wenn sowohl aus dem Zähler wie aus dem Nenner gleichviel in den äußersten Stellen zur Rechten stehende Nullen weggelassen werden ($\frac{10000}{17000} = \frac{10}{17}$).

§. 161. Der Werth jedes Bruches bleibt unverändert, wenn sowohl seinem Zähler wie dem Nenner gleichviel Nullen zur Rechten angehängt werden ($\frac{17}{20} = \frac{170}{200}$).

§. 162. Wenn man den Werth eines Bruches mit seinem Nenner multiplizirt, so muß das Produkt so groß werden wie der Zähler allein als ganze Zahl betrachtet ($\frac{3}{4} \times 4 = 3$).

§. 163. Der Werth jedes Bruchs ist der Quotient, welcher durch die (gedachte) Division seines Zählers mit dem Nenner entsteht. (Alle Sätze von Quotienten gelten daher auch von den Werthen der Brüche, und alle von diesen auch von dem Quotienten jeder Division).

§. 164. Das gemeinschaftliche Maaß zweier Zahlen ist auch das Maaß ihrer Summe und ihrer Differenz (4 ist ein Maaß von 20 und 28, also auch von 48 und von 8).

§. 165. Jede Zahl, die ein gemeinschaftliches (kleineres) Maaß mehrerer Zahlen ist, ist auch zugleich ein Maaß des größten gemeinschaftlichen Maaßes derselben (2 mißt 16, 20 und 28, und ist auch ein Maaß von 4).

§. 166. Alle gerade Zahlen haben gewiß die 2 zum gemeinschaftlichen Maaß (4 und 100 werden durch 2 gemessen).

§. 167. Jede Zahl, deren einzelne Ziffern (als Zahlen gleicher Einheiten betrachtet) zusammen eine Summe geben, in welcher 3 aufgeht, hat selbst die 3 zu ihrem Maaß (2301 hat 3 zum Maaß, denn $2 + 3 + 0 + 1 = 6$, worin 3 aufgeht).

§. 168. Jede Zahl von mehrern Ziffern, deren beide erste Stellen zur Rechten eine Zahl ausmachen, in welcher 4 aufgeht, hat auch

selbst

selbst die 4 zu ihrem Maaß (103732 wird durch 4 gemessen, da 4 in 32 aufgeht).

§. 169. Jede Zahl, deren erste Stelle eine 5 oder 0 enthält, hat 5 zum Maaß (115 und 9900 werden durch 5 gemessen).

§. 170. Jede Zahl, deren drei erste Stellen eine Zahl ausmachen, in welche 8 aufgeht, hat selbst die 8 zum Maaß (10752 wird durch 8 gemessen, da 8 in 752 aufgeht).

§. 171. Jede Zahl, deren einzelne Ziffern (als Zahlen gleicher Einheiten betrachtet) eine Summe geben, in welcher 9 aufgeht, hat selbst die 9 zum Maaß (670851 wird durch 9 gemessen, da $6 + 7 + 0 + 8 + 5 + 1 = 27$ sind, worin 9 aufgeht).

§. 172. Jede Zahl, deren erste Stelle 0 enthält, wird durch 10 gemessen (2100 hat 10 zum Maaß).

§. 173. Das Produkt zweier oder mehrerer Faktoren hat jeden derselben, wie auch jedes Produkt dieser Faktoren mit einander zu seinem Maaße ($5 \times 7 \times 3 = 105$, welche durch 5, 7 oder 3, wie auch durch 35, 15 oder 21 gemessen werden kann).

§. 174. Nur Brüche von gleichen Nennern können addirt und subtrahirt werden (§. 104).

§. 175. Durch Addition der Zähler mehrerer Brüche von gleichen Nennern und Beibehaltung ihres Generalnenners entsteht ein neuer Bruch, dessen Werth die Summe aller Werthe der vorigen ist ($\frac{5}{24} + \frac{13}{24} + \frac{7}{24} = \frac{23}{24}$).

§. 176. Durch Subtraktion des kleinern Zäh-

Zählers eines Bruches von einem größern Zähler eines andern Bruches mit gleichem Nenner und Beibehaltung dieses General-Nenners erhält man einen neuen Bruch, dessen Werth die Differenz der Werthe der beiden vorigen Brüche ausmacht ($\frac{7}{8} - \frac{2}{8} = \frac{5}{8}$).

§. 177. Durch Multiplikation des Zählers eines Bruches mit einer ganzen Zahl und Beibehaltung seines Nenners entsteht ein neuer Bruch, dessen Werth das Produkt des vorigen Bruches und der ganzen Zahl ist ($\frac{3}{17} \times 4 = \frac{12}{17}$, welcher 4 Mal so groß ist wie $\frac{3}{17}$).

§. 178. Wenn man den Nenner eines Bruches mit einer ganzen Zahl so dividirt, daß die Theilung aufgeht, und den Zähler des Bruches beibehält; so ist der Werth des neuen Bruches das Produkt des ersten Bruches und der ganzen Zahl ($\frac{7}{32} \times 4 = \frac{7}{8} = \frac{28}{32}$).

§. 179. Wenn man eine ganze Zahl mit dem Zähler eines Bruches multiplizirt, und diesem Produkte den Nenner des vorigen Bruchs gleichfalls zum Nenner giebt, so ist der Werth des neuen Bruches ein Produkt der ganzen Zahl und des vorigen Bruches ($8 \times \frac{3}{4} = \frac{24}{4}$, welcher $\frac{3}{4}$ Mal so groß ist wie 8).

§. 180. Wenn man den Zähler eines Bruches mit dem Zähler eines andern, und gleichfalls den Nenner des ersten mit dem Nenner des zweiten multiplizirt; so entsteht ein neuer Bruch, dessen Werth das Produkt der beiden ersten Brüche ist. ($\frac{8}{9} \times \frac{3}{4} = \frac{24}{36}$, welcher $\frac{3}{4}$

Mal

Mal so groß wie $\frac{8}{9}$, und $\frac{8}{9}$ Mal so groß wie $\frac{3}{4}$ ist).

§. 181. Wenn man den Zähler eines Bruches mit einer ganzen Zahl so dividirt, daß die Theilung aufgeht, und man den Nenner des Bruches beibehält, so ist der Werth des neuen Bruches der sovielste Theil des ersten Bruches, wievielmal die ganze Zahl 1 enthält ($\frac{12}{17} : 4 = \frac{3}{17}$, welcher der vierte Theil von $\frac{12}{17}$ ist).

§. 182. Wenn man den Nenner eines Bruchs mit einer ganzen Zahl multiplizirt, und den Zähler des Bruchs beibehält; so ist der Werth des neuen Bruchs der sovielste Theil des ersten, wievielmal die ganze Zahl 1 enthält ($\frac{12}{17} : 4 = \frac{12}{68} = \frac{3}{17} = \frac{1}{4} \times \frac{12}{17}$).

§. 183. Durch die sogenannte Division irgend einer Zahl (einer ganzen oder eines Bruchs) mit einem echten Bruche muß jederzeit ein sogenannter Antheil entstehen, welcher größer ist als der Dividendus ($8 : \frac{2}{3} = \frac{24}{2} = 12$, $\frac{3}{5} : \frac{2}{3} = \frac{9}{10}$).

§. 184. Wenn man eine ganze Zahl mit dem Nenner eines Bruches multiplizirt, und diesem Produkte den Zähler des Bruches zum Nenner giebt; so hat man die sogenannte Division der ganzen Zahl mit dem Bruche verrichtet ($12 : \frac{3}{4} = \frac{48}{3}$).

§. 185. Wenn man den Zähler eines Bruches mit dem Nenner eines andern multiplizirt, und gleichfalls den Nenner des ersten mit dem Zähler des zweiten multiplizirt, und dieses letzte Produkt dem ersten zum Nenner giebt; so hat man

man die sogenannte Division des ersten Bruches mit dem zweiten verrichtet ($\frac{3}{4} : \frac{2}{3} = \frac{9}{8}$).

§. 186. Die Multiplikation und sogenannte Division auch mit Brüchen sind einander genau entgegengesetzt. (Daher auch hier die Proben der Multiplikation und Division; §§. 144 — 147).

§. 187. Bei Dezimalbrüchen kann auch die Stelle der ganzen Einer als eine Bruchstelle angesehen werden, welche den Nenner Eintel hat (§. 152).

§. 188. Jede Ziffer in irgend einer Stelle von Dezimalbrüchen hat einen Zehntheil des Werths derselben Ziffer in der vorigen Dezimalstelle ihr zur Linken, und den zehnfachen Werth derselben Ziffer in der folgenden Stelle ihr zur Rechten (§§. 100, 101; z. B. 4,444; $\frac{4}{100}$ sind $\frac{1}{10}$ von $\frac{4}{10}$ und das Zehnfache von $\frac{4}{1000}$; $\frac{4}{10}$ sind $\frac{1}{10}$ von 4 Ganzen).

§. 189. Wenn der Zähler irgend einer Dezimalbruchsstelle bis auf Zehn vergrößert wird; so kann er nicht in derselben Stelle bleiben, sondern wird Eins in der vorigen Dezimalbruchsstelle.

§. 190. Ein Dezimalbruch bleibt am Werthe unverändert, wenn ihm zur Rechten auch noch so viel Nullen angehängt werden (0,72 = 0,72000; 8 Ganze oder $\frac{8}{1}$ = 8,00).

§. 191. Der Werth jeder Ziffer in irgend einer Stelle solcher Zahl, welche Dizimalbrüche enthält, wird zehnmal so groß wie vorher, wenn man das Einer- oder Eintel-Zeichen um eine

Stelle

Stelle weiter zur Rechten fortrückt, und zehnmal so klein wie vorher, wenn man dasselbe um eine Stelle weiter zur Linken versetzt 4,68 d. h. 4 Ganze, $\frac{6}{10}$, $\frac{4}{100}$, wird: 46,8 d. h. 46 Ganze, $\frac{8}{10}$, und im Gegentheil: 0,468 d. h. keine Ganze, $\frac{4}{10}$, $\frac{6}{100}$, $\frac{8}{1000}$).

§. 192. Wenn in einer Addition oder Subtraktion Zahlen mit Dezimalbruchstellen vorkommen, so erhält die Summe und der Rest die Anzahl der Bruchstellen von der Zahl, welche unter allen gegebenen die mehrsten hatte ($13,4 + 28 + 5,27 = 46,67$; $28,5 - 9,67 = 18,83$).

§. 193. Wenn eine Zahl mit Dezimalbruchstellen durch eine ganze Zahl multiplizirt wird, so erhält das Produkt ebensoviel Bruchstellen, wie der Multiplikandus hat ($2,34 \times 16 = 37,44$).

§. 194. Wenn eine ganze Zahl durch eine andere mit Bruchstellen multiplizirt wird, so erhält das Produkt auch soviel Bruchstellen, wie der Multiplikans hat ($6 \times 2,34 = 14,04$).

§. 195. Wenn beide Faktoren einer Multiplikation Bruchstellen haben, so erhält das Produkt soviel Bruchstellen, wie beide Faktoren zusammen haben ($19,15 \times 8,32 = 159,3280$).

§. 196 Wenn eine Zahl mit Bruchstellen durch eine ganze Zahl dividirt wird, so erhält der Quotient soviel Bruchstellen, wie der Dividendus hatte ($37,44 : 16 = 2,34$).

§. 197 Wenn ein Dividendus ebensoviel Bruchstellen hat, wie sein Divisor, so wird der Quotient eine ganze Zahl ohne Bruchstellen (37,44 : 2,34 = 16).

§. 198. Wenn ein Dividendus mehr Bruchstellen hat als sein Divisor, so erhält der Quotient sovielweniger Bruchstellen als der Dividendus, wieviel der Divisor enthält (10,368 : 3,24 = 3,2).

§. 199. Wenn ein Divisor Bruchstellen, aber der Dividendus entweder gar keine oder weniger hat als der Divisor, so werden sämmtliche Ziffern des Antheils (nöthigenfalls durch Zusetzung von Nullen) um soviel Stellen im Einheitswerthe erhöht, wie viel Bruchstellen mehr im Divisor als im Dividendus enthalten sind (10368 : 3,24 = 3200; 1036,8 : 3,24 = 320; 2036,8 : 0,324 = 3200; 103,68 : 0,0000324 = 3200000).

§. 200. Wenn irgend eine Division (mit bloßen ganzen Zahlen oder auch mit Bruchstellen) nicht aufgeht, und man setzt die Division durch Anhängung einer Null in den Dividendus fort, so erhält die neugefundene Ziffer des Quotienten die zunächst zur Rechten folgende Dezimalstelle (8932 : 35 = 255 + Rest von $\frac{7}{1} = \frac{70}{10} : 35 = \frac{2}{10}$, also der ganze Antheil = 255,2; 8,932 : 3,5 = 2,552; 8932 : 0,35 = 25520).

§. 201. Wenn man an den Zähler irgend eines echten Bruches zur Rechten Nullen anhängt, und dann die durch den Nenner verlangte Division soviel wie möglich ausführt,

so

so bekommen die dadurch gefundenen Ziffern des Quotienten die sovielsten Dezimalbruchsstellen, aus der wievielsten Nullenanhängung sie entstanden sind ($\frac{5}{16} = 0{,}3125$).

IV.

Von Potenzen und Wurzeln.

§. 202. Jede Zahl ist ihre eigene **erste Potenz** und auch ihre eigene **erste Wurzel** ($5 = 5^1 = \sqrt[1]{5}$; $1 = 1^1 = \sqrt[1]{1}$).

§. 203. Wenn man irgend eine bekannte Potenz einer gegebenen Zahl mit dieser Zahl selbst multiplizirt, so entsteht die zunächst höhere Potenz derselben ($64 = 4^3$, $64 \times 4 = 256 = 4^4$).

§. 204. Wenn man eine bekannte Potenz einer gegebenen Zahl mit dieser Zahl selbst dividirt, so entsteht die zunächst niedrigere Potenz derselben ($27 = 3^3$, $27 : 3 = 9 = 3^2$).

§. 205. Die 0te Potenz jeder Zahl ist 1 ($6^0 = 1$, $2^0 = 1$).

§. 206. Jede Potenz und jede Wurzel der Zahl 1 ist $= 1$ ($1^6 = 1$, $\sqrt[6]{1} = 1$).

§. 207. In folgender Tabelle sind die richtigen Quadrate und Würfel aller Zahlen von 1 bis 10 enthalten:

1ste Potenz.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Quadrat.	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100
Würfel.	1	8	27	64	125	216	343	512	29	1000

§. 208. Wenn man 2 Zahlen zu gleicher Potenz erhebt, und diese beide Potenzen mit einander multiplizirt, so erhält man die ebensovielste Potenz des Produkts der beiden ersten Zahlen ($2^3 = 8$, $5^3 = 125$, $8 \times 125 = 1000 = 10^3$).

§. 209. Wenn man den Zähler und Nenner eines Bruchs zu gleicher Potenz erhebt, so geben diese Potenzen einen Bruch, welcher die ebensovielste Potenz des ersten Bruches ist ($\frac{3}{4}^3 = \frac{27}{64}$).

§. 210. Das Quadrat jeder einziffrigen Zahl hat nicht mehr als 2 Ziffern ($9^2 = 81$).

§. 211. Das Quadrat jeder zweiziffrigen Zahl ($86^2 = 7396$) enthält:

a. das Quadrat der Einerzahl (36), welches in der ersten Stelle anfängt, und sich höchstens bis in die zweite Stelle erstrecken kann;

b. das Produkt der Zehnerzahl mit der Einerzahl (480), welches sich höchstens bis in die dritte Stelle erstrecken kann;

c. das Produkt der Einerzahl mit der Zehnerzahl (480), welches immer das vorige Produkt ist, sich also eben soweit erstreckt;

d. das Quadrat der Zehnerzahl (6400), welches in der dritten Stelle anfängt, und sich höchstens bis in die vierte erstrecken kann.

§. 212. Das Quadrat jeder zweiziffrigen Zahl besteht wenigstens aus drei und höchstens aus vier Ziffern ($11^2 = 121$, $99^2 = 9801$).

§. 213.

§. 213. Das Quadrat jeder dreiziffrigen Zahl besteht wenigstens aus fünf, und höchstens aus sechs Ziffern ($101^2 = 10201$, $999^2 = 998001$).

§. 214. Das Quadrat jeder Zahl enthält höchstens doppelt soviel Ziffern, wie sie selbst, kann aber auch nur eine Ziffer weniger haben.

§. 215. Das Quadrat jeder mehrziffrigen Zahl ($2864^2 = 8202496$) enthält:

a. das Quadrat der Zahl jeder Ziffer, deren jedes in dem ebensovielsten Paare der Ziffern des ganzen Quadrats anfängt, die wievielste Stelle seine Wurzelzahl in der ganzen Wurzel einnimmt, (sich aber oft noch in die nächste Ziffer erstreckt; 16 ist im ersten Paare 96 enthalten; 3600 fängt im 2ten 2400 an, erstreckt sich aber noch in die folgende Stelle; 640000 fängt im 3ten Paare 200000 an, und erstreckt sich noch in die folgende Stelle; 4000000 ist im 4ten, hier nur halben, Paar enthalten);

b. zweimal das Produkt der Zahl jeder Stelle mit der Zahl jeder andern Stelle, (mit welchen Produkten die an sie gränzenden Quadrate der einzelnen Theile in den Paaren des ganzen Quadrats vermischt sind) oder daher auch: zweimal das Produkt jeder Ziffer mit allen höhern Stellen zusammen, deren jedes in der zweiten Ziffer des ebensovielsten Paares anfängt, die wievielste Stelle der niedrigste einzelne Faktor in der Wurzel einnimmt, und sich

we-

wenigstens durch soviel Ziffern erstreckt, wieviel Stellen der größte Faktor enthält, (oft aber noch eine Stelle weiter zur Linken hinausreicht; $4 \times 2860 = 1144$, $1144 \times 2 = 2288$, fängt in 90 an, und erstreckt sich durch vier Stellen; $60 \times 2800 = 168000$, $168000 \times 2 = 336000$, fängt in 2000 an, und erstreckt sich durch drei Stellen; $800 \times 2000 = 1600000$, $2 \times 1600000 = 3200000$, fängt in 200000 an, und erstreckt sich durch zwei Stellen).

§. 216. Folgende Tabelle enthält in der untern Reihe die richtigen Quadratwurzeln der darüber stehenden vollkommnen Quadrate:

Quadrat	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100
$\sqrt[2]{\ }$ oder $\sqrt{\ }$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

§. 217. Die Quadratwurzel jeder Quadratzahl von einer geraden Anzahl Ziffern enthält genau halb soviel Ziffern wie diese.

§. 218. Die Quadratwurzel jeder Quadratzahl von einer ungeraden Anzahl Ziffern enthält die Hälfte von der um 1 vermehrten Ziffernzahl des Quadrats.

§. 219. Wieviel Paare Nullen man einer Quadratzahl zur Rechten anhängt, soviel einzelne Nullen erhält die Wurzel mehr als sie vorher hatte, und um soviel Stellen wird jede andere Ziffer der Wurzel zur Linken hin erhöht ($\sqrt{\ } 121 = 11$, $\sqrt{\ } 1210000 = 1100$).

§. 220. Das Quadrat jedes Bruches ist wieder ein Bruch, der aus den Quadraten des Zählers und Nenners des Wurzelbruchs besteht ($\frac{2}{3}^2 = \frac{4}{9}$, $\frac{9}{4}^2 = \frac{81}{16}$).

§. 221. Das Quadrat jedes echten Bruches hat einen kleinern Werth als die Wurzel ($\frac{4}{9} < \frac{2}{3}$).

§. 222. Die Quadratwurzel jedes Quadratbruches ist wieder ein Bruch, der aus den Wurzeln des Zählers und Nenners des Quadratbruches besteht ($\sqrt{\frac{49}{100}} = \frac{7}{10}$).

§. 223. Jedes Quadrat jedes Dezimalbruches hat genau doppelt soviel Bruchstellen wie die Wurzel, (kann also auch nicht eine Stelle weniger haben wie bei ganzen Zahlen; $0{,}3^2 = 0{,}09$, $0{,}23^2 = 0{,}0529$).

§. 224. In jedem Paar Ziffern des Quadrats eines Dezimalbruches ist eine Ziffer der Wurzel enthalten (0,0529, in $\frac{5}{100}$ ist $\frac{2}{10}$, in $\frac{29}{10000}$ ist $\frac{3}{100}$ enthalten).

§. 225. Wenn eine Quadratzahl Ganze und Dezimalbruchstellen enthält, so enthält die Wurzel auch Ganze und halbsoviel Bruchstellen wie das Quadrat ($\sqrt{1{,}69} = 1{,}3$, $\sqrt{266{,}4044} = 18{,}62$).

§. 226. Eine Zahl, die kein vollkommenes Quadrat einer ganzen Zahl ist, kann auch nicht das Quadrat eines Bruches oder einer gemischten Zahl sein.

§. 227. Wieviel Paare Nullen man einer Quadratzahl als Bruchstellen anhängt, um soviel einzelne Bruchstellen wird zwar die Wurzel ver-

vergrößert, aber die Ganzen der Wurzel bleiben dadurch unverändert ($\sqrt{121,0000} = 11,00$).

V.

Von Verhältnissen, Proportionen, Progressionen und Logarithmen.

§. 228. Wenn jedes zweier Verhältnisse einem dritten gleich ist, so sind die beiden ersten gewiß selbst einander gleich ($18 : 4 = 9 : 2$, $27 : 6 = 9 : 2$, also auch $18 : 4 = 27 : 6$; $99 - 92 = 8 - 1$, $7 - 0 = 8 - 1$, also $99 - 92 = 8 - 1$).

§. 229. In jeder geometrischen Proportion ist das Produkt der äußern Glieder gleich dem Produkt der mittlern Glieder ($18 : 4 = 27 : 6$, $18 \times 6 = 4 \times 27$).

§. 230. In jeder stetigen geometrischen Proportion ist das Produkt der äußern Glieder dem Quadrat des mittlern gleich ($\div\!\!\div\; 27 : 9 : 3$, $27 \times 3 = 9^2$).

§. 231. Jedes Produkt zweier Faktoren ist die vierte geometrische Proportionalzahl zur Eins und den beiden Faktoren ($3 \times 5 = 15$, $1 : 3 = 5 : 15$, $1 : 5 = 3 : 15$).

§. 232. Der Quotient jeder Division ist das vierte Glied einer Proportion, deren erstes der Divisor, das zweite Eins und das dritte der Dividendus ist ($27 : 3 = 9$, $3 : 1 = 27 : 9$).

§. 233. Zu jeden 3 gegebenen Zahlen muß man die 4te geometrische Proportionalzahl finden, wenn man das Produkt der 2ten und

3ten mit der 1sten dividirt (3,12,17, $12 \times 17 = 204 : 3 = 68$, $3 : 12 = 17 : 68$).

§. 234 Die Quadratwurzel jedes Produkts zweier Zahlen ist die mittlere stetige geometrische Proportionalzahl zwischen den beiden Faktoren ($27 \times 3 = 81$, $\sqrt{81} = 9$, $\div\!\div\ 27 : 9 : 3$).

§. 235. Wenn ein Produkt zweier Zahlen dem Produkte zweier andern gleich ist, so machen die 4 Faktoren in der Ordnung eine geom. Proportion aus, daß die Faktoren des einen Produkts die beiden äußern, die des andern die mittlern Glieder sind ($3 \times 4 = 2 \times 6$, daher $3 : 2 = 6 : 4$, oder $4 : 2 = 6 : 3$, $6 : 3 = 4 : 2$, $6 : 4 = 3 : 2$, $3 : 6 = 2 : 4$, $2 : 4 = 3 : 6$).

§. 236. In jeder geom. Proportion steht auch das erste Glied mit dem dritten in gleichem Verhältniß wie das zweite mit dem vierten ($7 : 21 = 2 : 6$, $7 : 2 = 21 : 6$).

§. 237. In jeder geom. Proportion steht auch das zweite Glied zum ersten in demselben Verhältnisse wie das vierte zum dritten ($7 : 2 = 21 : 6$, $2 : 7 = 6 : 21$).

238. Wenn man beide Glieder eines Verhältnisses mit gleicher Zahl multiplizirt oder dividirt, so bleiben sie in demselben Verhältniß ($12 : 3 = 4$, $12 \times 5 : 3 \times 5 = 4$, $\frac{12}{3} : \frac{3}{3} = 4$).

§. 239. Wenn man beide Vorder- oder beide Hinterglieder einer geom. Proportion mit gleicher Zahl multiplizirt oder dividirt, so bleiben

auch

auch die Produkte oder Quotienten mit den andern Gliedern in derselben Proportion ($12 : 3 = 60 : 15$, $12 \times 2 : 3 = 60 \times 2 : 15$, $12 : 3 \times 6 = 60 : 15 \times 6$, $\frac{12}{3} : 3 = \frac{60}{3} : 15$, $12 : \frac{3}{2} = 60 : \frac{15}{2}$).

§. 240. Wenn man jeden Zähler zweier Brüche mit dem Nenner des andern Bruches multiplizirt, so stehen die Produkte als ganze Zahlen in demselben geom. Verhältniß wie die gegebenen Brüche ($\frac{3}{4} : \frac{2}{3} = 1\frac{1}{8}$, $9 : 8 = 1\frac{1}{8}$).

§. 241. In jeder geom. Proportion verhält sich die Summe und Differenz der beiden Vorderglieder zur Summe und Differenz der beiden Hinterglieder, wie jedes einzelne Vorderglied zu seinem Hintergliede ($3 : 2 = 6 : 4$, $3 + 6 : 2 + 4 = 3 : 2$, $6 - 3 : 4 - 2 = 6 : 4$).

§. 242. In jeder geom. Proportion verhält sich die Summe und Differenz der beiden Glieder beider Verhältnisse zu einander wie die beiden Vorderglieder und wie die beiden Hinterglieder zu einander ($3 : 2 = 6 : 4$, $3 + 2 : 6 + 4 = 3 : 6$, $3 - 2 : 6 - 4 = 2 : 4$).

§. 243. Die gleichvielsten Potenzen der vier Glieder einer geom. Proportion stehen in derselben Proportion wie ihre Wurzeln ($3 : 2 = 6 : 4$, $27 : 8 = 216 : 64$).

§. 244. Die gleichvielsten Wurzeln der vier Glieder einer geom. Proportion stehen in derselben Proportion wie die gedachten Potenzen (∺ $4 : 16 : 64$, $2 : 4 : 8$).

§. 245. Von mehrern gleichen geom. Verhältnissen steht die Summe aller Vorderglieder zur Summe aller Hinterglieder in demselben Verhältniß wie jedes Vorderglied zu seinem Hintergliede ($5 : 15 = 1 : 3 = 4 : 12 = 7 : 21$, $17 : 51 = 5 : 15$ u. s. w.).

§. 246. In jeder geom. Progression verhält sich die Summe aller Glieder außer dem letzten zur Summe aller außer dem ersten wie jedes einzelne Glied zum nächstfolgenden (∺ $1 : 3 : 9 : 27 : 81$, $40 : 120 = 1 : 3 = 27 : 81$ u. s. w.).

§. 247. Die Produkte der gleichvielsten Glieder verschiedener Proportionen machen zusammen gleichfalls eine Proportion aus, worin sie die Stellen ihrer Faktoren einnehmen ($5 : 1 = 10 : 2$, $3 : 7 = 6 : 14$, $5 \times 3 : 1 \times 7 = 10 \times 6 : 2 \times 14$).

§. 248. Die Quotienten, welche aus der Division der Glieder einer Proportion durch die ebensovielsten Glieder einer andern entstehen, machen in derselben Ordnung eine Proportion aus ($5 : 2 = 15 : 6$, $7 : 12 = 14 : 24$, $\frac{5}{7} : \frac{2}{12} = \frac{15}{14} : \frac{6}{24}$, $\frac{5}{7} : \frac{1}{6} = \frac{15}{14} : \frac{1}{4}$).

§. 249. In jeder steigenden geom. Progression ist jedes Glied gleich dem Produkte des ersten mit der sovielsten Potenz des Exponenten, um wieviel Glieder das besagte von dem ersten entfernt ist (∺ $2 : 6 : 18 : 54 : 162$; $162 = 2 \times 3^4 = 2 \times 81$).

§. 250. In jeder von 1 an steigenden geom. Progression ist jedes Glied gleich der sovielsten

Po-

Potenz des Exponenten; um wieviel Glieder das besagte von der 1 entfernt ist ($\div$ 1 : 4 : 16 : 64; 64 = 4^3).

§. 251. In jeder arithmetischen Proportion ist die Summe der äußern Glieder gleich der Summe der mittlern (3 — 7 = 1 — 5; 3 + 5 = 7 + 1).

§. 252. In jeder steigenden arithm. Progression ist jedes Glied gleich dem ersten addirt mit der sovielmal genommenen Differenz, um wieviel Glieder das besagte von dem ersten entfernt ist ($\div$ 5 — 8 — 11 — 14; 14 = 5 + 3 × 3).

§. 253. In jeder von 0 an steigenden arithm. Progression ist jedes Glied gleich der sovielmal genommenen Differenz, um wieviel Glieder das besagte von 0 entfernt ist ($\div$ 0 — 7 — 14 — 21, 21 = 3 × 7).

§. 254. Jede vier Glieder einer geometrischen Progression stehen mit einander in ebensolcher geometrischen Proportion, in welcher arithmetischen Proportion die mit ihnen verbundenen vier Glieder einer damit zusammengestellten arithmetischen Progression stehen
($\div$ 1 : 10 : 100 : 1000 : 10000 : 100000 : 1000000,
$\div$ 0 — 1 — 2 — 3 — 4 — 5 — 6;
10 : 10000 = 100 : 100000; 1 — 4 = 2 — 5).

§. 255. Der Logarithmus jedes Produkts nach einem gewissen System ist gleich der Summe der Logarithmen seiner Faktoren (10000 × 100 = 1000000, 2 + 4 = 6).

§. 256.

§. 256. Der Logarithmus des Quotienten jeder Division ist gleich der Differenz des Logarithmus des Divisors vom Logarithmus des Dividendus (100000 : 1000 = 100, 5 — 3 = 2).

§. 257. Der Logarithmus jeder Potenz einer Zahl ist gleich dem Produkt des Logarithmus der Wurzel mit dem Potenzzeiger ($100^3 = 1000000$, $6 = 2 \times 3$).

§. 258. Der Logarithmus der Wurzel jeder Potenz ist gleich dem Quotienten aus der Division des Logarithmus der Potenz mit dem Exponenten derselben ($\sqrt[3]{1000000} = 100$, $6 : 3 = 2$.

§. 259. Jeder Potenzzeiger ist gleich dem Quotienten aus der Division des Logarithmus der Potenz mit dem Logarithmus der Wurzel ($1000000 = 100^3$, $6 : 2 = 3$).

VI.

Von benannten Zahlen.

§. 260. Benannte Zahlen können nur mit gleichbenannten addirt und davon subtrahirt werden. (Eine sogenannte Addition oder Subtraktion der Summen von ungleichen Benennungen, z. B. Thalern und Groschen, sind eigentlich mehrere Verrichtungen).

§. 261. Wenn man eine benannte Zahl mit einer unbenannten multiplizirt, so bekommt das Produkt die Benennung des Multiplikandus (3 Thlr. × 5 = 15 Thlr.

§. 262.

§. 262. Wenn man eine benannte Zahl mit einer unbenannten dividirt, so bekommt der Antheil die Benennung des Dividendus (12 Thlr. : 4 = 3 Thlr.)

§. 263. Wenn man (durch Division) eine Zahl findet, welche anzeigt, wievielmal eine benannte Zahl in einer andern von gleicher Benennung enthalten ist, so wird dieser Quotient eine unbenannte Zahl (12 Thlr. : 3 Thlr. = 4).

§. 264. Nur gleichartige Größen können ein Zahlenverhältniß, (§§. 79, 83,) mit einander haben, (welches wohl von dem sogenannten Verhältniß der Benennungen, §§. 88, 89, zu unterscheiden ist).

§. 265. Das Verhältniß zweier gleichbenannter Zahlen ist gleich dem Verhältniß derselben unbenannten Zahlen (3 Thlr. : 12 Thlr. = 3 : 12).

§. 266. Wenn man unter vier benannten Zahlen, deren Benennungen eine richtige Proportion ausmachen (§. 90), das zweite Glied mit dem dritten verwechselt, so bilden sie eine geometrische Proportion (3 ℔ zu 7 Thlr. wie 12 ℔ zu 28 Thlr., 3 ℔ : 12 ℔ = 7 Thlr. : 28 Thlr.)

§. 267. Wenn man unter vier benannten Zahlen, deren Benennungen in einer umgekehrten Proportion stehen, das dritte Glied dem ersten und zweiten vorsetzt, so bilden sie in der neuen Ordnung eine geometrische Proportion (Wenn 6 Arbeiter ein Werk in 12 Tagen vollbringen, so wird dasselbe Werk von

8

8 Arbeitern in 9 Tagen vollendet; 8 A. : 6 A. = 12 T. : 9 T.

§. 268. Wenn in mehrern, sowohl geraden wie umgekehrten Benennungs-Proportionen alle zweiten und vierten Glieder von gleicher Benennung sind, und man ordnet ihre Glieder einzeln nach den §§. 266 und 267, so bilden alle die vier Produkte der gleichen Glieder der neuen Ordnung eine geom. Proportion. (Wenn 4 Arbeiter von einem Graben bestimmter Breite in einer gewissen Zeit 6 Ruthen verfertigen, so werden 8 Arbeiter an einem ebenso breiten Graben in ebenso langer Zeit 12 Ruthen vollenden, 4 : 8 = 6 : 12; wenn eine gewisse Zahl Arbeiter an einem Graben bestimmter Breite in 2 Tagen 6 Ruthen graben, so werden dieselben Menschen von derselben Arbeit in 4 Tagen 12 Ruthen verfertigen, 2 : 4 = 6 : 12; wenn gewisse Arbeiter in bestimmten Tagen einen Graben von 2 Fuß Breite, 6 Ruthen lang fortführen, so werden ebensoviel Leute in derselben Zeit einen Graben von 3 Fuß Breite, 4 Ruthen lang machen, umgek. Prop. 3 : 2 = 6 : 4; also auch in zusammengesetzter Prop. $4 \times 2 \times 3 : 8 \times 4 \times 2 = 6 \times 6 \times 6 : 12 \times 12 \times 4$).

§. 269. Wenn in einzelnen Proportionen die Zahl aller dritten Glieder gleich ist, also in der aus ihnen zusammengesetzten Proportion das dritte Glied eine gewisse Potenz dieser Zahl seyn würde; so verhält sich auch das Produkt aller ersten Glieder zum Produkt aller zweiten

ten, wie das einzelne dritte zu dem Produkte aller vierten Glieder dividirt mit der nächstvorhergehenden Potenz des dritten ($24 : 64 = 6 : \frac{576}{6^2}$).

Dritter Abschnitt.

Aufgaben.

I.

Vom Numeriren (ganzer Zahlen).

§. 270. Jede Zahl von zwei Ziffern auszusprechen. (18, 75, 10, 11, 12). — Man nenne zuerst die Einer, und dann die Zehner; (achtzehn, fünf und siebzig, zehn; 11 und 12 haben besondere Namen: elf, zwölf).

§. 271. Jede Zahl von drei Ziffern, also auch in zusammengesetzten jede Klasse auszusprechen. (235,208,700,010,006). — Man nenne erst die Hunderte, dann die Einer, zuletzt die Zehner; Nullen werden nie mit genannt. zwei hundert fünf und dreißig, zwei hundert und acht, sieben hundert, zehn, sechs).

§. 272. Jede Zahl von sechs Ziffern, und in zusammengesetzten jede Abtheilung auszusprechen. — Man theile sie in zwei Klassen,

sen, spreche zuerst die höhere zur Linken nach §. 271, mit ihrem allgemeinen Namen Tausend aus, und dann die niedere zur Rechten (120 040; 011 000; 000 012).

§. 273. Jede Zahl von mehrern Ziffern auszusprechen. — Man theile dieselbe, soweit es angeht, in Abtheilungen von sechs Ziffern, spreche diese von der höchsten (vielleicht unvollständigen) zur Linken an, nach §. 272, der Reihe nach bis zur letzten aus, und nenne am Ende jeder Abtheilung, worin eine Zahlziffer vorkommt, ihren gemeinschaftlichen Namen, der 5ten Abtheilung zur Linken: Quadrillionen, der 4ten: Trillionen, der 3ten: Billionen, der 2ten: Millionen; die erste Abtheilung hat aber gar keinen gemeinschaftlichen Namen
(12 070''''000 300'''000 000''600 000'001 087).
Wenn in einer Abtheilung oder Klasse gar keine Zahlziffer vorkommt, so wird auch der Name derselben ausgelassen. Wenn aber die höhere Klasse einer Abtheilung genannt werden muß, und auch in ihrer niedern keine Zahlziffer steht, so muß doch nach dem Namen Tausend gleich auch der Name der ganzen Abtheilung genannt werden. Auch ohne Eintheilung durch Zeichen kann man die richtige Folge beobachten, und den Namen der höchsten Abtheilung durch Division der Ziffernzahl mit 6 erfahren.

§ 274. Jede richtig ausgesprochene Zahl mit Ziffern zu schreiben. — Man beobachte zuerst genau die höchste, zuerst genannte Abtheilung, schreibe zur Linken zuerst die Klasse der Tausende, wenn sie darin vorkommt, dann die niedere Klasse dieser Abtheilung, jede mit drei Stellen nach §. 43, und wo keine Zahlziffer vorkommt, da setze man 0 (die jedoch in der höchsten Abtheilung vor Zahlziffern ausgelassen wird). So fahre man mit jeder folgenden Abtheilung der natürlichen Reihe nach fort, wenn aber in dieser Ordnung eine Abtheilung gar nicht genannt wird, so schreibe man statt derselben 6 Nullen. Wird nach den Tausenden gleich der Name der Abtheilung genannt, so schreibe man doch statt der niedrigsten Klasse derselben 3 Nullen. (Acht Tausend Trillionen, siebenzig Millionen, dreihundert und vier Tausend und zehn:

8 000‴000 000″000 070′304 010).

II.

Von den vier Grundrechnungsarten mit ganzen Zahlen.

§. 275. Jede gegebenen Zahlen zu addiren. — Man schreibe die Zahlen so, daß ihre gleichen Stellen genau untereinander stehen. Man zähle die Ziffern der gleichen Stellen zusammen, und zwar am bequemsten von der niedrigsten an; wenn aber die Summe einer Stelle eine mehrziffrige Zahl wird, so schreibe man nur die Einheiten dieser Stelle darunter, und zähle die höhern ihrer eigenthümlichen Stelle zu. (28607 + 497859 + 4598

$$\begin{array}{r} 28607 \\ 497859 \\ 4598 \\ \hline 531064 \end{array}$$).

§. 276. Jede Zahl von einer größern zu subtrahiren. — Man schreibe die kleinere unter die größere so, wie bei der Addition, zähle in jeder Stelle die Ziffer des Subtrahendus von der des Minuendus ab, und setze den Rest darunter. Ist aber in einer Stelle die untere Ziffer größer als die obere, so entlehne man von dem Minuendus der nächstfolgenden Stelle 1, rechne dieselbe als 10 Einheiten dem Minuendus dieser Stelle zu, so wird man immer von ihm abziehen können. Dieserwegen ist es nöthig, die Subtraktion immer von den niedrigsten Einheiten anzufangen. Wenn man in der Stelle, von welcher man 1 entlehnen sollte, eine 0 findet, so nimmt man 1 von der folgenden Stelle und betrachtet die übergangene 0 nachher wie eine 9. (130148 — 27853;

$$\begin{array}{r} 130148 \\ 27853 \\ \hline 102295 \end{array}$$).

§. 277. Eine mehrziffrige Zahl mit einer einziffrigen zu multipliziren. — Man multiplizire jede Ziffer des Multiplikandus (am bequemsten von den Einern an) mit dem Multiplikans nach der Pythagorischen Tafel, setze die Produkte in ihre gehörigen Stellen unter die Ziffern des Multiplikandus, und addire sämmtliche Produkte, (welches am bequemsten gleich bei Findung der einzelnen Produkte geschieht (70145 × 7;

$$\begin{array}{r} 70145 \\ 7 \\ \hline 491015 \end{array}$$

).

§. 278. Eine mehrziffrige Zahl mit einem mehrziffrigen Multiplikans zu vervielfachen. — (Am bequemsten setze man den kleinsten der Faktoren als Multiplikans unter die gleichen Stellen des größern Multiplikandus). Mit jeder Ziffer des Multiplikans vervielfache man den ganzen Multiplikandus, (wobei man am besten wieder mit der Ziffer zur Rechten anfängt, und dann die richtigen Stellen der Produkte sicher trifft, wenn man die Vervielfachung des Multiplikandus mit jeder Ziffer des Multiplikans unter dieser anfängt). Die Summe aller Produkte ist das ganze Produkt der beiden Faktoren (38017 × 1409;

$$\begin{array}{r} 38017 \\ 1409 \\ \hline 342153 \\ 152068 \\ 38017 \\ \hline 53565953 \end{array}$$

).

§. 279. Faktoren, welche zur rechten Hand Nullen haben, am kürzesten zu multipliziren. — Man verrichte die Multiplikation ohne diese Nullen, und hänge dem Produkt alle die Nul-

Nullen an, welche die Faktoren zusammen zur Rechten haben. ($2700 \times 9000 = 24300000$; $82 \times 10 = 820$).

§. 280. Eine ein- oder zweiziffrige Zahl mit einer einziffrigen zu dividiren. — In der Columne der Pythagorischen Tafel, über welcher in der obersten Reihe der Divisor steht, suche man den Dividendus oder die zunächst kleinere Zahl, so ist in derselben Reihe die äußerste Zahl zur Linken der gesuchte Quotient, der aber, mit dem Divisor multiplizirt und das Produkt vom Dividendus subtrahirt, im letztern, gewöhnlichern Falle noch einen Rest läßt, unter welchen der Divisor als Nenner eines Bruchs gesetzt wird, welches auch geschieht, wenn der Dividendus kleiner als der Divisor ist ($13 : 4 = 3\frac{1}{4}$; $6 : 7 = \frac{6}{7}$).

§. 281. Jede mehrziffrige Zahl mit einer einziffrigen zu dividiren. — Man dividire (nach §. 280.) jede Stelle des Dividendus, von der höchsten zur Linken an, mit dem Divisor, und setze die dadurch gefundenen einzelnen Ziffern des Antheils in die gehörigen Stellen (nach derselben Ordnung). Jeden Rest der Subtraktion des Produkts aus dem Quotienten mit dem Divisor von der Ziffer des Dividendus nehme man als Zehner zu der folgenden Ziffer des Dividendus. Stößt man auf eine Ziffer des Dividendus, welche kleiner ist als der Divisor, so setze man in diese Stelle des Antheils eine 0, und nehme diese Ziffer des Dividendus auch als Zehner zu der folgengenden Ziffer. Aber wenn gleich die erste Ziffer des Dividendus zu klein ist, so bleibt diese o aus dem Antheil weg. Die aus diesen einzelnen Quotientenziffern bestehende Zahl ist der ganze Antheil der Division, zu dem noch der letzte Rest als Bruch zugefügt wird (22527 : 4

$$\begin{array}{r|l} 4)\ 22527 & 5631\tfrac{3}{4}). \\ 25 & \\ 12 & \\ 7 & \end{array}$$

§. 282. Jede mehrziffrige Zahl mit einer kleinern, jedoch von ebensovielen Ziffern zu dividiren. (84 : 21; 987 : 325; 98 : 23; 91 : 24; 8012 : 2978; 701 : 198.) — *a.* Man dividire zuerst die höchste Stelle des Dividendus mit derselben Stelle des Divisors, multiplizire den, vorläufig noch in Gedanken behaltenen, Quotienten mit dem ganzen Divisor; und wenn sich dieses Produkt vom Dividendus subtrahiren läßt, so setze man den gedachten Quotienten als den gewissen Antheil der ganzen Division an, und füge den Rest als Bruch hinzu.

$$\begin{array}{r|l} 84 & 21 \\ \underline{84} & \overline{4} \\ 0 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 987 & 325 \\ \underline{975} & \overline{3\tfrac{12}{325}} \\ 12 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 98 & 23 \\ \underline{92} & \overline{4\tfrac{6}{23}} \\ 6 & \end{array}$$

b. Wenn aber das Produkt aus dem gedachten Quotienten nicht von dem Dividendus subtrahirt werden kann, (weil es zu groß ist,) so vermindere man diesen Quotienten so lange, bis das Produkt aus ihm und dem ganzen Divisor von dem Dividendus subtrahirt werden kann,

mache

(mache ihn aber nicht zu klein, damit der Rest keinen unechten Bruch gebe; sobald daher der Rest eben so groß oder noch größer ist als der Divisor, so merke man, daß man den Quotienten zu sehr verkleinert habe, und vergrößere ihn wieder), und wenn dann der etwanige Rest einen echten Bruch giebt, so setze man den gefundenen Quotienten nebst dem Bruche) als den richtigen Antheil der ganzen Division an.

$$\begin{array}{r|l} 91 & 24 \\ \cline{2-2} \underline{72} & 3\frac{19}{24} \\ 19 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 8012 & 2978 \\ \cline{2-2} \underline{5956} & 2\frac{2056}{2978} \\ 2056 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 701 & 198 \\ \cline{2-2} \underline{594} & 3\frac{107}{198} \\ 107 & \end{array}$$

(Zur leichtern Findung des gewissen Quotienten merke man noch folgende Hülfsregeln: α. wenn der gedachte Quotient aus der höchsten Stelle der richtige Antheil der ganzen Division sein soll, so müssen im Durchschnitt die folgenden Ziffern des Divisors ebensovielmal in den Ziffern der gleichen Stellen des Dividendus enthalten sein; daher wird der gedachte Quotient gewöhnlich wenigstens um 1 zu groß sein, vorzüglich wenn die sovielmal genommene höchste Ziffer des Divisors von der höchsten Ziffer des Dividendus keinen Rest läßt; wenn aber besonders β. die Ziffer der zunächstfolgenden Stelle des Divisors groß, etwa 6, 7, 8, 9, ist, so wird man den richtigen Antheil sicherer treffen, indem man die höchste Ziffer des Divisors bei der vorläufigen Theilung um 1 größer annimmt, z. B. im letzten Beispiel nicht 7 : 1 = 7, sondern 7 : 2 = 3; bisweilen wird man denn zwar finden, daß der Quotient um 1 zu klein sei, aber die dadurch nöthige einmalige Vergrößerung desselben um 1 ist nicht so unbequem wie die oftmalige Verkleinerung).

§. 283. Mit jeder mehrziffrigen Zahl eine

an-

andere, die um eine Ziffer größer ist, zu dividiren (8023 : 186; 213940 : 89; 967 : 16; 21393 : 7903; 3400 : 843). — *a.* Man sondere zuerst nur soviel der höchsten Stellen des Dividendus ab, wieviel Stellen der Divisor enthält, (so daß die niedrigste Stelle zur Rechten zurückbleibt), und dividire diesen Theil des Dividendus nach §. 282; zu dem Reste setze man dann die folgende Ziffer, wie im §. 281, und dividire dann diesen Theil des Dividendus wieder nach §. 282; und wenn die zweite Division nicht möglich ist, weil dieser letzte Theil des Dividendus kleiner ist als der Divisor, so wird der letzte Theil des Quotienten o, und der ganze Rest ein Bruch.

$$\begin{array}{r|l} 802\;3 & 186 \\ \underline{744} & \overline{43\tfrac{25}{186}} \\ 583 & \\ \underline{558} & \\ 25 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 94\;0 & 89 \\ \underline{89} & \overline{10\tfrac{50}{89}} \\ 50 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 96\;7 & 16 \\ \underline{96} & \overline{60\tfrac{7}{16}} \\ 7 & \end{array}$$

b. Wenn aber der zuerst abgesonderte Theil des Dividendus kleiner ist als der Divisor, und daher diese erste Division eine o zum Quotienten geben würde, so nehme man sogleich auch die folgende Stelle des Dividendus dazu, und theile diese um eine Stelle größere Zahl nach §. 282, indem man die höchste Ziffer derselben mit zur folgenden rechnet, und daher vorläufig mit der höchsten Stelle des Divisors die beiden höchsten des Dividendus nach §. 282. theilt, und durch dieselben Untersuchungen den ge-

gewissen Antheil der ganzen Division findet.

$$\begin{array}{r|l} 21394 & 7903 \\ 15806 & 2\frac{5588}{7903} \\ \hline 5588 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 3400 & 843 \\ 3372 & 4\frac{28}{843} \\ \hline 28 & \end{array}$$

§. 284. Mit jeder mehrziffrigen Zahl jede andere von noch mehrern Stellen zu dividiren (80237000 : 186; 14110166 : 83). — Man sondere zuerst nach §. 283 *a*. soviele der höchsten Stellen des Dividendus, wieviel der Divisor enthält, oder, wenn es nöthig ist, nach *b*. noch eine Stelle mehr ab, und dividire diesen Theil nach §. 282. Nach verrichteter Subtraktion setze man (nur) eine folgende Ziffer des Dividendus (auch wenn dieselbe 0 ist) mit dem Reste zusammen als folgenden Theil des Dividendus an, und theile denselben gleichfalls nach §. 282; wenn aber diese Division nicht ausgeführt werden kann, so nehme man zwar sogleich noch eine Ziffer des Dividendus zu diesem Theile, und, wenn es nöthig ist, immer noch eine, bemerke aber jede dieser unmöglichen Theilungen durch eine 0 im Antheile. Und auch nach jeder ausgeführten Subtraktion setze man wieder die folgende Ziffer des Dividendus mit dem Reste zusammen als folgenden Theil des Dividendus an, und dividire immer wieder nach §. 282, bis man auch die letzte Ziffer des Dividendus getheilt hat, worauf der Rest wieder als Bruch zu dem aus allen Quotientenziffern bestehenden ganzen Antheil gesetzt wird.

```
802,37000 | 186              143,10166 | 83
744       | 431322 108/186    83       | 170002
 583                          581
 558                          581
  257                           0166
  610                            166
   420
    480
    108
```

§. 285. Jede Zahl mit jedem Divisor, welcher zur Rechten Nullen enthält, zu theilen (478845 : 6300; 73060000 : 8000). — Man sondere sowohl diese Nullen vom Divisor, wie auch ebensoviel Stellen zur Rechten vom Dividendus ab, theile dann die übrigen Stellen des Dividendus mit den übrigen des Divisors nach den vorigen Regeln §§. 280 bis 284, und setze die abgesonderten Ziffern des Dividendus mit dem etwanigen Reste der letzten Subtraktion als Bruch zu dem Antheil.

```
4788,45 | 63,00             73060,000 | 8,000
 441    | 76 45/6300         10       | 9132 4000/8000
  378                         26
  378                          20
                                4
```

III.

Von den Brüchen.

§. 286. Jeden geschriebenen Bruch auszusprechen ($\frac{87012}{3010007}$). — Man spreche sowohl den Zähler über dem Strich wie den Nenner unter demselben als ganze Zahlen aus, und füge zu dem letzten noch die Silbe theil oder tel hinzu.

87 012 3 010 007tel.

§. 287. Jeden mit Worten ausgedrückten Bruch zu schreiben. (Neun Millionen und sechs — zehn Millionen, achthundert Tausend und elftel.) — Man schreibe sowohl den Zähler wie den Nenner als ganze Zahlen, erstern über, letztern unter einem Strich. $\frac{9000006}{10800011}$.

§. 288. Alle geschriebene Dezimalbrüche, auch Ganze mit Dezimalbrüchen zusammen, auszusprechen (0,341029; 83,00070000020006). — Man theile sämmtliche Bruchziffern mit Einschluß der Eintel in ebensolche Abtheilungen und Klassen, wie ganze Zahlen, aber hier von der Linken zur Rechten

0 34 102'9; 83 00 070'000 200'06;

und spreche dann nach den Ganzen jede einzelne Ziffer mit dem besondern ihr zugehörigen Nenner aus.

$\frac{3}{10}$, $\frac{4}{100}$, $\frac{1}{1000}$, $\frac{2}{1000000}$, $\frac{9}{10000000}$; 83 Ganze, 7 Zehntausendtel, 2 Tausendmilliontel, 6 Zehnbilliontel. Oder man spreche den ganzen Zusammenhang von Ziffern selbst mit Einschluß aller Ganzen, wie einen Zähler

aus

aus (nach der gewöhnlichen Eintheilung von der Rechten zur Linken), und gebe diesem nur den einen Nenner, welcher der letzten Bruchstelle gebührt.

$$\frac{341{,}029}{1000000};\quad \frac{830''007{,}000'020{,}006}{10''000\ 000\ 000\ 000}.$$

§. 289. Alle mit Worten ausgedrückte Dezimalbrüche, auch Ganze mit denselben, zu schreiben. (Drei Ganze, fünf Hunderttel, acht Milliontel; — sieben und dreißig Hunderttausendtel; — achthundert und neun Hundertel; — zwanzigtausend und sechs Tausendtel). — Man schreibe zuerst die vorhandenen Ganzen nach ihren Regeln, und wenn keine derselben vorhanden sind, statt derselben eine 0 mit einem Komma; von der Einer- und Eintel-Ziffer an weise man zur Rechten hin den einzeln oder zusammen genannten Zählern die Stellen an, welche sie nach ihren Nennern als ganze Zahlen zur Linken hin bekommen müßten, und fülle die zwischen ihnen und den Einteln noch leeren Stellen mit Nullen aus. 3,050008; — 0,00037. Oder wenn der im Zusammenhange ausgesprochene Zähler soviel oder noch mehr Ziffern hat, wie der gleichfalls mit Ziffern ausgedrückte Nenner haben würde, so muß der Zähler auch Ganze enthalten. 8,09; — 20,006.

§. 290. Jeden Bruch, also auch jeden Rest einer Division ganzer Zahlen in Dezimalbrüchen auszudrücken. ($\frac{4}{5}$, $\frac{5}{18}$, $\frac{4}{7}$). — Man hänge dem Zähler eine 0 an, und dividire ihn

ihn dann mit dem Nenner; wenn wieder ein Rest bleibt, so hänge man abermals eine 0 an und dividire wieder; dies setze man so lange fort, bis entweder kein Rest mehr bleibt, oder man denselben für zu unbedeutend hält. Die Ziffern des Quotienten sind lauter Bruchstellen von Zehnteln an, und zwar ihrer soviel, wieviel Nullen man angehängt hat.

40 | 5	50 | 16	40 | 7
40 | 0,8	48 | 0,3125	35 | 0,57142857
	20	50
	16	10
	40	30
	32	20
	80	60 u. s. w.
	80	40
		50

Sobald derselbe Dividendus (40), also auch derselbe Quotient (5) und derselbe Rest (5) wiederkommen, welche schon einmal da gewesen sind, so kommen immer dieselben Ziffern des Quotienten wieder, und man kann sie also leicht aus den vorigen, so weit man will, fortsetzen, denn aufgehen kann die Division dann nie.

§. 291. Dezimalbrüche, mit Ganzen oder ohne dieselben, zu addiren (2347,098 + 41,7659 + 509,83; 0,0087 + 0,009). — Man schreibe sie so unter einander, daß die

glei-

gleichen Stellen in eine Columne kommen, (wobei die Kommata zur Richtschnur dienen,) und addire sie dann wie bloße ganze Zahlen, (von den niedrigsten Stellen an,) worauf das Komma in der Summe auch dieselbe Stelle einnimmt.

2347,098	0,0087
41,7659	0,009
509,83	0,0177.
2898,6939.	

§. 292. Dezimalbrüche, mit Ganzen oder ohne dieselben, zu subtrahiren (42,15 — 4,6213; 0,011 — 0,0098; 1,037 — 0,97). — Man schreibe die kleinen Zahlen unter die größern nach den Werthen der Stellen, und subtrahire wie bei ganzen Zahlen, (wobei man die über den Bruchziffern leeren Stellen mit Nullen ausfüllen kann, um beim Entlehnen auch dieselbe Regel zu beachten, daß eine übergangene 0 zur 9 wird,) worauf das Komma im Reste auch dieselbe Stelle einnimmt.

42,1500	0,011	1,037
4,6213	0,0098	0,97
27,5287	0,0012	0,067.

§. 293. Dezimalbrüche mit einander und mit Ganzen zu multipliziren (16 × 2,34; 19,45 × 83,2; 0,00006012 × 0,907508). — (Man setze zur Bequemlichkeit den Faktor von wenigern Zahlziffern unter den von mehrern, wobei es jedoch gleichgültig ist, wie man sie unter einander schreibt, wenn man nur die Regel be-

ob-

obachtet, beim Multiplіziren mit jeder einzelnen Ziffer des Multiplikans die dadurch entstehende Reihe unter derselben anzufangen). Man multiplizire den ganzen Multiplikandus nach und nach mit den einzelnen Ziffern, sowohl der Bruchstellen wie der Ganzen des Multiplikans von der Rechten gegen die Linke, und addire die einzelnen Produkte. Das ganze Produkt erhält dann soviel Bruchstellen, wieviel beide Faktoren zusammen haben, welche nöthigenfalls noch durch Nullen zur Linken unmittelbar hinter dem Komma zu ersetzen sind.

```
  2,34          19,45          0,907508
    16            832        · 0,00006012
  ----          -----        ------------
  1404           3890             1815016
  234           5835              907508
  ----         15560            5445048
 37,44         -------       ------------
               1618,240      0,0000545593809 6
```

§. 294. Dezimalbrüche mit einander und mit Ganzen gegenseitig zu dividiren (37,44 : 16; 37,44 : 2,34; 1,2327 : 23,7; 46,3 : 0,003) — Man dividire sie nach denselben Regeln wie ganze Zahlen, gebe dem Quotienten um soviel weniger Bruchstellen als dem Dividendus, wieviel der Divisor deren enthält, und wenn der Quotient nicht soviel Stellen hat, wie er Bruchstellen haben muß, so werden dieselben zur Linken unmittelbar hinter dem Komma durch Nullen ersetzt; wenn aber der Divisor mehr Bruchstellen hat als der Dividendus, so hänge man dem

Quo-

Quotienten als ganzer Zahl noch soviel Nullen zur Rechten an.

37,44	16
32	2,34
54	
48	
64	
64	

37'44	2,34
23,4	16
1404	
1404	

1,2327	23,7
1185	52
477	0,052
477	
3	

46,3	0,003
3	154
16	15400
15	
13	
12	
1	

Aber auch der Rest dieser ganzen Division kann hier, wie §. 290., durch Anhängung einer 0 noch ferner getheilt, und dies bis zum Aufgehen, oder so lange man will, fortgesetzt werden. Die Nullen, welche, wie im letzten Beispiel, dem Quotienten zur Rechten angehängt werden mußten, um die gehörigen Stellen der Ganzen hervorzubringen, werden dann durch die andern herauskommenden Ziffern des Quotienten verdrängt, von denen so viele noch zu den Ganzen genommen werden, wieviel Nullen angehängt werden sollten.

```
1,2327 | 23,7
 477   | 0,05201265
  300
   630   u. s. w.
    1560
     1380
      205
```

```
46,3 | 0,003
16   | 15433,3
 13
  10   u. s. w.
   10
    10
     1
```

§. 295. Jede ganze Zahl in einen (unechten) Bruch von beliebigem Nenner zu verwandeln (1 zu Dritteln, 4 zu Siebenteln). — Man multiplizire die Zahl mit dem gegebenen Nenner, mache das Produkt zum Zähler, und gebe ihm den verlangten Nenner ($\frac{3}{3}$, $\frac{28}{7}$).

§. 296. Jede gemischte Zahl in einen bloßen (unechten) Bruch zu verwandeln ($3\frac{4}{5}$, $1\frac{8}{9}$). — Man multiplizire die ganze Zahl mit dem Nenner des Bruchs, addire zum Produkte den Zähler, und gebe dieser Summe wieder den vorigen Nenner ($\frac{19}{5}$, $\frac{17}{9}$).

§. 297. Aus jedem unechten Bruche die Ganzen auszuziehen ($\frac{19}{4}$, $\frac{12}{3}$, $\frac{4}{4}$). — Man dividire den Zähler durch den Nenner, und gebe dem etwanigen Reste wieder den vorigen Nenner ($4\frac{3}{4}$, 4, 1).

§. 298. Jedem Bruche einen beliebigen Nenner zu geben, in welchem der vorige Nenner aufgeht ($\frac{1}{3}$ zu Zwölfteln, $\frac{3}{5}$ zu Zwanzigsteln). — Man dividire den neuen Nenner durch den alten, multiplizire den Quotienten

ten mit dem Zähler, und gebe diesem Produkt den neuen Nenner ($12 : 3 = 4$, $4 \times 1 = 4$, $\frac{4}{12} = \frac{1}{3}$; $20 : 5 = 4$; $4 \times 3 = 12$, $\frac{12}{20} = \frac{3}{5}$).

§. 299. Brüchen von verschiedenen Nennern einen Generalnenner zu geben ($\frac{1}{3}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{5}{6}$). — Man multiplizire sämmtliche Nenner mit einander, und gebe das Produkt jedem der Brüche zum Nenner nach §. 298 ($3 \times 5 \times 4 \times 6 = 360$, $\frac{120}{360}$, $\frac{216}{360}$, $\frac{90}{360}$, $\frac{300}{360}$).

§. 300. Verschiedenen Brüchen den kleinsten Generalnenner zu geben ($\frac{1}{3}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{5}$). — Man lasse bei der Multiplikation der einzelnen Zähler unter einander (nach §. 299.) diejenigen Faktoren ganz weg, welche in andern aufgehen. Wenn ferner etliche der Faktoren ein gemeinschaftliches Maaß haben, so dividire man sie damit, und nehme die Quotienten statt der gemessenen Zahlen. Zuletzt multiplizire man die noch übrigen und verkleinerten Faktoren mit einander, aber auch mit den gebrauchten Maaßen, ein solches Produkt wird dann der kleinste Generalnenner für die gegebenen Brüche sein. Wenn sich keine jener Hebungen anbringen lassen, so sind die gegebenen Nenner lauter Primzahlen zu einander, und das nach §. 299. erhaltene Produkt ist der kleinste Generalnenner. (3 geht in 6, 2 in 4, 5 in 5 auf, daher bleibt 3, 2 und die eine 5 weg; 4 und 6 haben das gemeinschaftliche Maaß 2, daher werden statt ihrer die Quotienten 2 und 3 genommen; nun wird $5 \times 2 \times 3$ und auch mit dem

dem Maaße 2 multiplizirt, wodurch das Produkt 60 als kleinster Generalnenner entsteht: $\frac{20}{60}$, $\frac{36}{60}$, $\frac{50}{60}$, $\frac{30}{60}$, $\frac{24}{60}$).

§. 301. Einen Bruch, wo möglich, zu heben, und zwar durch die möglichst kleinen Zahlen auszudrücken. ($\frac{1104}{9288}$, $\frac{255}{360}$). — Man dividire zuerst den Nenner mit dem Zähler, mit dem etwanigen Rest wieder den Divisor, und so fahre man fort, immer mit dem Reste den vorigen Divisor zu theilen, bis die Theilung aufgeht. Alsdann ist der letzte Divisor das größte gemeinschaftliche Maaß des Zählers und Nenners, wodurch sich der Bruch so klein wie möglich heben läßt. Bisweilen läßt sich die erste Verrichtung abkürzen, indem man schon vorher nach den §§. 166 bis 172. ein gemeinschaftliches Maaß findet, wodurch man den Bruch zum Theil hebt. Wenn aber bei der Division 1 als Rest bleibt, läßt sich der Bruch gar nicht heben.

```
1104|9288|8
    | 456|1104|2
          192| 456|2
                72| 192|2
                     48| 72|1
                         24| 72|3

      |24
 1104 | 46
 9288 |387
```

$$\frac{255}{360}\Big|_{5}\ \frac{51}{72}\Big|_{3}\ \frac{17}{24}$$

$$17\,|\,24\,|\,1 \qquad 7\,|\,17\,|\,2 \qquad 3\,|\,7\,|\,2 \qquad 1$$

§. 302. Brüche (nebst Ganzen) zu addiren ($\frac{1}{3} + 6\frac{3}{5} + \frac{1}{4} + 7\frac{5}{6}$). — Man suche einen Generalnenner, und gebe denselben den verschiedenen Brüchen, addire dann ihre Zähler, und gebe der Summe den Generalnenner. Die gewöhnlich in der Summe enthaltenen Ganzen hebe man heraus, und zähle sie den etwa gegebenen Ganzen zu.

60 (G. N.)

$\frac{1}{3}$	20	—	20
$6\frac{3}{5}$	12	—	36
$\frac{1}{4}$	15	—	15
$7\frac{5}{6}$	10	—	50
2			
$15\frac{1}{60}$			$\frac{121}{60}\Big\vert 2\frac{1}{60}$.

§. 303. Brüche (nebst Ganzen) zu subtrahiren. ($\frac{3}{4} - \frac{2}{3}$, $6\frac{3}{8} - 1\frac{5}{8}$, $3 - \frac{5}{7}$). — *a.* Man gebe den Brüchen einen Generalnenner, ziehe den Zähler des Subtrahendus von dem des Minuendus ab, und gebe dem Reste den Generalnenner. (Die Ganzen werden für sich subtrahirt). *b.* Wenn der Zähler des erweiterten Subtrahendus größer ist als der des Minuendus, so entlehne man von dem Ganzen 1, mache dies zu einem Bruche mit dem Generalralnenner, und nehme seinen Zähler zu dem des Minuendus hinzu, wodurch dieser so groß wird, daß subtrahirt werden kann. *c.* Wenn der Minuendus gar keinen Bruch hat, so nehme man von den Ganzen 1, ziehe dann bloß den Zähler des Subtrahendus von seinem Nenner ab und gebe dem Reste wieder diesen Nenner.

$$\begin{array}{cccccccccccc}
 & \frac{12}{} & & & & & \frac{24}{} & & \frac{24}{} & & & \\
\frac{3}{4} & 3 & - & 9 & 6\cdot & \frac{3}{8} & 3 & - & {}^{9}_{33} & 3\cdot & \cdot & 7 \\
\frac{2}{3} & 4 & - & \underline{8} & \underline{1} & \frac{5}{6} & 4 & - & \underline{20} & \underline{\cdot} & \frac{5}{7} & \underline{5} \\
 & & & \frac{1}{12} & 4 & \ldots & \ldots & \ldots & \frac{13}{24} & 2 & \ldots & \frac{2}{7}
\end{array}$$

§. 304. Jeden Bruch mit einer ganzen Zahl (und umgekehrt) zu multipliziren. ($\frac{4}{5} \times 8$, $3 \times \frac{5}{12}$, $2\frac{7}{20} = \frac{47}{20} \times 5$). — *a.* Man multiplizire den Zähler mit der ganzen Zahl, und gebe dem Produkte den Nenner. ($\frac{4}{5} \times 8 = \frac{32}{5} = 6\frac{2}{5}$). *b.* Oder, wenn die ganze Zahl in dem Nenner aufgeht, lasse man den Zähler unverändert, und dividire den Nenner durch die ganze Zahl. ($3 \times \frac{5}{12} = \frac{5}{4}$; $\frac{47}{20} \times 5 = \frac{47}{4} = 11\frac{3}{4}$).

§. 305. Brüche mit einander zu multipliziren. ($\frac{3}{5} \times \frac{4}{7}$, $3\frac{1}{8} \times 5\frac{2}{3}$, $\frac{11}{12} \times 4\frac{1}{6}$). — Man multiplizire die Zähler mit einander, und ebenso die Nenner; das erste Produkt mache man zum Zähler, das zweite zum Nenner. ($\frac{3}{5} \times \frac{4}{7} = \frac{12}{35}$, $\frac{25}{8} \times \frac{17}{3} = \frac{425}{24} = 17\frac{17}{24}$, $\frac{11}{12} \times \frac{25}{6} = \frac{275}{72} = 3\frac{59}{72}$).

§. 306. Jeden Bruch mit einer ganzen Zahl zu dividiren. $\frac{2}{3} : 7$, $\frac{12}{13} : 3$, $5\frac{1}{7} : 12$). — *a.* Man multiplizire den Nenner des Bruchs mit der ganzen Zahl, und lasse den Zäh-

ler

ler unverändert. ($\frac{2}{5} : 7 = \frac{2}{35}$). *b.* Oder, wenn die ganze Zahl in dem Zähler aufgeht, dividire man diesen, und lasse seinen Nenner unverändert. ($\frac{12}{13} : 3 = \frac{4}{13}$, $\frac{36}{7} : 12 = \frac{3}{7}$).

§. 307. Die (sogenannte) Division einer ganzen Zahl mit einem Bruche auszuführen. ($7 : \frac{2}{5}$, $3 : \frac{12}{13}$, $12 : 5\frac{1}{7}$). — Man multiplizire die ganze Zahl mit dem Nenner, und setze unter dieses Produkt den Zähler des vorigen Bruchs als Nenner. ($7 : \frac{2}{5} = \frac{35}{2} = 17\frac{1}{2}$, $3 : \frac{12}{13} = \frac{39}{12} = 3\frac{3}{12}|\frac{1}{4}$, $12 : \frac{36}{7} = \frac{84}{36} = 2\frac{12}{36}|\frac{1}{3}$).

§. 308. Die (sogenannte Division eines Bruchs mit einem Bruche auszuführen. ($\frac{12}{35} : \frac{4}{7}$, $17\frac{17}{24} : \frac{2}{3}$, $3\frac{59}{72} : 4\frac{1}{6}$). — Man multiplizire den Zähler des Dividendus mit dem Nenner des Divisors, und gleichfalls den Nenner des Dividendus mit dem Zähler des Divisors; das erste Produkt mache man zum Zähler, das letzte zum Nenner des (sogenannten) Quotienten. ($\frac{12}{35} : \frac{4}{7} = \frac{84}{140}|\frac{3}{5}$, $\frac{425}{24} : \frac{17}{3} = \frac{1275}{408} = 3\frac{51}{408}|\frac{1}{8}$, $\frac{275}{72} : \frac{25}{6} = \frac{1650}{1800}|\frac{165}{180}|\frac{11}{12}$).

IV.

Von Potenzen und Wurzeln.

§. 309. Jede Zahl zu einer verlangten Potenz zu erheben. (4^5, $\frac{2}{3}^4$, $2\frac{1}{4}^3$ $0{,}13^2$ 7^1, 99^0, $\frac{11}{12}^0$). — Man multiplizire die 1 sovielmal hinter einander, wie der Potenzzeiger 1 enthält, mit der gegebenen Zahl. ($1 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4 = 1024$; $1 \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{16}{81}$; $1 \times \frac{9}{4} \times \frac{9}{4} \times \frac{9}{4} = \frac{729}{64} = 11\frac{25}{64}$; $1 \times 0{,}13 \times 0{,}13 = 0{,}0169$; $1 \times 7 = 7$; 1 gar nicht

nicht mit 99 multiplizirt bleibt = 1; 1 nicht mit $\frac{11}{12}$ mult. = 1).

§. 310. Die Quadratwurzel aus einer drei- oder vierziffrigen Zahl zu ziehen. ($\sqrt{7396}$, $\sqrt{580}$). — Man sondre die beiden ersten Stellen von der 3ten und 4ten ab; dann suche man unter den Quadraten der einziffrigen Zahlen dasjenige auf, welches zunächst unter der Zahl enthalten ist, die aus der 3ten und 4ten (oder bloß 3ten) Stelle der gegebenen Zahl besteht, und ziehe von dieser Zahl das gefundene Quadrat ab, seine Wurzel aber setze man als die höchste Stelle der ganzen gesuchten Wurzel an. Zu dem Reste dieser höhern Abtheilung setze man die nächste Ziffer des folgenden (ersten) Paares, und dividire diese Zahl mit dem Doppelten des schon gefundenen Theiles der Wurzel, den neuen Quotienten aber setze man sowohl als neuen (niedrigsten) Theil der Wurzel an, wie auch als erste Stelle zur Rechten neben dem Divisor. Diesen vergrößerten Divisor multiplizire man alsdann mit dem neuen Theile der Wurzel, und ziehe das Produkt von dem Reste, wozu auch noch die folgende Ziffer des Paares gesetzt ist, ab. Wenn bei dieser Subtraktion kein Rest bleibt, so ist die gegebene Zahl ein vollkommenes Quadrat, bleibt ein Rest, so läßt sich die Wurzel noch durch Dezimalbrüche der Vollständigkeit nähern.

```
       73,96 | 86            5,80 | 24
       64    |               4    |
      ----   |              ---   |
16,6) 99,6   |         4,4) 18,0  |
      99 6   |              17 6
      ----                  ----
                               4
```

§. 311. **Aus jeder mehrziffrigen Zahl die Quadratwurzel zu ziehen.** ($\sqrt{}$ 46499, $\sqrt{}$ 31438449). — Man theile die gegebene Zahl in Ziffern-Paare von der Rechten zur Linken ein, wobei die höchste Abtheilung auch nur eine Ziffer enthalten kann. Man verfahre wieder nach §. 310., setze aber zu dem Reste der zweiten Abtheilung von der Linken wieder die nächste Ziffer des folgenden Paares, und dividire dies mit dem Doppelten des ganzen schon gefundenen Theils der Wurzel (der 2 Ziffern). Den Quotienten setze man wieder nicht bloß als neuen Theil der Wurzel an, sondern auch rechts zum Divisor, multiplizire wieder diesen vergrößerten Theiler mit der neuen Ziffer der Wurzel und subtrahire das Produkt von dem vorigen Reste, wozu auch noch die zweite Ziffer des vorher getheilten Paares gesetzt wird. Zu dem Reste dieser Subtraktion kommt wieder die nächste Ziffer des folgenden Paares, und so fahre man immer weiter fort, bis kein Ziffern-Paar mehr übrig ist, wobei man immer nach §. 310. verfährt, wenn man nur den ganzen schon gefundenen Quotienten als einen Theil, und nur die immer hinzukommende Ziffer als den andern Theil der

Wur-

Wurzel betrachtet. So oft man mit dem stets wachsenden Divisor die nöthige Theilung nicht ausführen kann, setze man sowohl in die Wurzel wie an den Divisor eine 0, und nehme gleich das folgende Paar dazu. Wenn man aber das Produkt aus dem Divisor und dem neuen Theile der Wurzel nicht subtrahiren kann, so ist dieser zu groß genommen, und muß daher verkleinert werden.

```
        74,64,96|864
        64
16,6)   106,4
         99 6
1724)     6 89,9
          6 89 6
               3
```

```
        31,43,84,49|5607
        25
10,6)   64,3
        63 6
112,0)     78,4
1120,7)    78 44,9
           78 44 9
```

Will man sich nun bei einem Reste noch, soviel es nöthig ist, der Wurzel nähern, so hänge man ein Paar Nullen an, und verfahre wieder wie vorher, und fahre damit fort, so weit man will, aber jede Ziffer der Wurzel, die aus einem solchen Paar angehängter Nullen entsteht, ist eine Bruchstelle.

```
            746499|864,001
1728,0)        30,0
17280,0)       30 00,0
172800,7)      30 00 00,0
               12 71 99 9
          u. s. w.
```

```
         580|24,08
48,0)    40,0
480,8)   40 00,0
         38 46 4
          1 53 6
      u. s. w.
```

§. 312.

§. 312. Aus Dezimalbrüchen die Quadratwurzel zu ziehen. ($\sqrt{0,469}$). — Man theile vom Komma an gegen die rechte Hand die Bruchstellen in Paare, und wenn zur Rechten nur eine übrig bleibt, so hänge man derselben eine 0 an. Nun verfahre man wie bei ganzen Zahlen, und hänge auch nach Belieben Paare von Nullen an. Aus jedem Paare der Ziffern und Nullen entsteht eine Bruchstelle.

```
            46,90|684
            36   |0,684.
           -----
     12,8)  109,0
            102 4
          ---------
   136,4)    6 60,0
             5 45 6
            --------
             1 14 4
```

§. 313. Aus jedem Bruche die Quadratwurzel zu ziehen. ($\sqrt{\frac{4}{9}}$, $\sqrt{\frac{3}{4}}$). — Man muß sowohl aus dem Zähler wie aus dem Nenner die Wurzel ziehen ($\sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{2}{3}$); da aber selten bei den Gliedern vollkommne Quadratzahlen sind, so verwandle man den Bruch in einen Dezimalbruch, und ziehe daraus nach §. 312. die Wurzel. ($\sqrt{\frac{3}{4}}$).

```
   30|4                       75|86
   28|0,75                    64| 0,86.
   --                         --
   20               16,6)  110,0
   --                         99 6
                             ------
                             10 4 u. s. w.
```

V.

V.

Von Verhältnissen, Proportionen, Progressionen und Logarithmen.

§. 314. Das geometrische Verhältniß zweier Zahlen zu bestimmen. (21 : 7, 7 : 21). — Man dividire (eigentlich die 1ste mit der 2ten, aber nach den Mehrsten) die 2te Zahl durch die 1ste, so findet man den Verhältnißzeiger. ($\frac{7}{21} = \frac{1}{3}$, $\frac{21}{7} = 3$).

§. 315. Zu jeden 3 Gliedern einer g. Proportion das 4te zu finden. (3 : 4 = 7 : x, 3 : 4 = x : 9; 3 : x = 7 : 9; x : 4 = 7 : 9). — Man multiplizire die äußern oder mittlern Glieder, welche beide gegeben sind, mit einander, und dividire das Produkt mit dem noch übrigen Gliede. ($4 \times 7 = 28$, $28 : 3 = 9\frac{1}{3}$; $3 \times 9 = 27$, $27 : 4 = 6\frac{3}{4}$; $3 \times 9 = 27$, $27 : 7 = 3\frac{6}{7}$; $4 \times 7 = 28$, $28 : 9 = 3\frac{1}{9}$).

§. 316. Zu jeden 2 Zahlen die mittlere stetige g. Proportionalzahl zu finden. ($\div$ 4 : x : 16). — man multiplizire beide Zahlen mit einander, und ziehe aus dem Produkt die Quadratwurzel, so ist diese die verlangte Zahl ($4 \times 16 = 64$, $\sqrt{64} = 8$, $\div$ 4 : 8 : 16).

§. 317. Eine gegebene Zahl in eine gewisse Anzahl Theile zu theilen, die solche Verhältnisse haben, wie ebensoviel andere gegebene Zahlen. (36 in 3 Theile, die sich verhalten wie 2, 3, 4, 6), — Man addire die gegebenen Verhältnißzahlen, und suche dann zu ihrer Summe, jede von ihnen und der zu theilenden Zahl

eine

eine 4te g. Proportionalzahl, so werden die letzten alle sich so verhalten wie (2 3 + 4 + 6 = 15; 15 : 2 = 36 : $\frac{24}{5}$; 15 : 3 = 36 : $\frac{36}{5}$; 15 : 4 = 36 : $\frac{48}{5}$; 15 : 6 = 36 : $\frac{72}{5}$).

§. 318. Aus jedem Gliede einer g. Progression das nächstgrößere und irgend ein größeres Glied zu finden. ($\div\!\div$ 2 : 6 : 18 : 54 : 162, aus 6 das folgende und das 3te größere Glied). — Man multiplizire das gegebene Glied mit dem Exponenten, so findet man das nächstgrößere Glied, oder multiplizire jenes überhaupt mit der sovielsten Potenz des Exponenten, um wieviel Glieder das gesuchte von dem gegebenen entfernt sein soll, so findet man das bestimmte größere Glied. (6 × 3 = 18; 6 × 3^3 = 6 × 27 = 162).

§. 319. Aus jedem Gliede einer g. Progression ein um gewisse Stellen entferntes kleineres Glied zu finden, (aus 54 das 2te kleinere Glied). — Man dividire das gegebene Glied mit der sovielsten Potenz des Exponenten, um wieviel Glieder das gesuchte entfernt sein soll. (54 : 3^2 = 54 : 9 = 6).

§. 320. Aus jedem Gliede einer ar. Progression ein um gewisse Stellen entferntes größeres oder kleineres Glied zu finden; (in $\div$ 1 — 2 — 3 — 4 — 5 — 6 — 7 aus 4 das 3te größere und 2te kleinere). — Man addire um die bestimmten Male die Differenz, so findet man das verlangte größere, man subtrahire um die bestimmten Male den Unterschied,

so

so hat man das verlangte kleinere Glied. ($4 + 3 \times 1 = 7$; $4 - 2 \times 1 = 2$).

§. 321. In jedem logarithmischen System den Logarithmus jeder Zahl zu finden; (im System 1 : 10 den Log. 10000). — Um wieviel Glieder die Zahl, deren Logarithmus verlangt wird, von einer andern Zahl, deren Log. man schon hat, entfernt ist, sovielmal addirt man die Differenz der ar. Progression zum schon bekannten Log. der vorigen Zahl. (Log. $10 = 1$; 10000 ist das 3te Glied von 10, also ist $1 + 3 \times 1 = 4$ der Log. 10000). Der Logarithmus eines Mittelgliedes zwischen zweien, deren Log. man schon hat, findet man, indem man diese beiden Log. addirt, und die Hälfte ihrer Summe nimmt, welche nach dem gewöhnlichen System Dezimalbruchstellen enthält.

§. 322. Das Produkt zweier großer Zahlen durch ihre Logarithmen zu finden. (1000×1000000). — Man addire den Log. beider Faktoren, so ist die zu dieser Summe als zu ihrem Log. gehörige Zahl das Produkt der beiden gegebenen. (Log. $1000 = 3$, Log. $1000000 = 6$; $3 + 6 = 9$; 9 ist Log. 1000000000).

§. 323. Den Quotienten der Division zweier Zahlen durch ihre Logarithmen zu finden. ($10000000 : 10000$). — Man subtrahire den Log. des Divisors von dem des Dividendus, so ist die zu dem Reste als ihrem Log. gehörige Zahl der gesuchte Quotient. ($7 - 4 = 3$; 3 ist Log. 1000).

§. 324. Jede Potenz einer Zahl durch ihren

ren Logarithmus zu finden. (100^3). — Man multiplizire den Log. der gegebenen Zahl mit dem Exponenten ihrer verlangten Potenz, so ist die zu dem Produkt als ihrem Log. gehörige Zahl die gesuchte Potenz der gegebenen. (Log. $100 = 2$; $2 \times 3 = 6$; 6 ist Log. 1000000).

§. 325. Jede Wurzel einer Zahl durch ihren Logarithmus zu finden. ($\sqrt[3]{1000000}$). — Man dividire den Log. der gegebenen Zahl mit dem Exponenten der verlangten Wurzel, so ist die zu dem Quotienten als ihrem Log. gehörige Zahl die gesuchte Wurzel. ($6 : 3 = 2$; 2 ist Log. 100).

VI.

Von benannten Zahlen.

§. 326. Eine sogenannte Summe von ungleichbenannten Zahlen zu schreiben. (7 Gr. + 9 Rlr. + 4 Pf.; 5 Quent. + 6 ℔ + 4 Lth. + 19 Ct.) — Man ordne die Zahlen nach der Größe ihrer Benennungen so, daß die höchste Benennung zur Linken, die niedrigste zur Rechten steht, und lasse die Zeichen der Addition dazwischen aus. (9 Rtlr. 7 Gr. 4 Pf.; 19 Ct. 6 ℔ 4 Lth. 5 Qu).

§. 327. Ungleich benannten Zahlen gleiche Benennung zu geben, (3 Wsp. 4 Schff.; $8\frac{3}{7}$ Gr. 4 Pf.) — Man multiplizire die Zahl höherer Benennung mit der Reduktionszahl, und addire zum Produkt die Zahl der niedern Benennung. ($3 \times 24 = 72$; $72 + 4 = 76$ Sch.; $\frac{59}{7} \times 12 = \frac{708}{7} = 101\frac{1}{7} + 4 = 105\frac{1}{7}$ Pf).

§. 328.

§. 328. Aus einer Zahl niederer Benennung die darin enthaltenen Einheiten höhern Namens herauszuheben. (71 Schff. zu Wsp. zu reduziien). — Man dividire die gegebene Zahl, so giebt der Quotient die Einheitnn höherer Art und der Rest wird entweder ein Bruch der höhern, oder bleibt eine ganze Zahl der niedern Art. (71 : 24 = $2\frac{23}{24}$ Wsp. oder = 2 Wsp. 23 Schff.)

§. 329. Die Addition und Subtraktion gleichbenannter Zahlen zu verrichten. (15 Rtl. + 9 Rtl.; 24 Rtl. — 15 Rtl.) — Beides geschieht wie bei unbenannten Zahlen; die gefundenen Summen und Reste bekommen die Benennungen der gegebenen Zahlen. (16 Rl. + 9 Rl. = 24 Rl.; 24 Rl. — 15 Rtl. = 9 Rl.)

§. 330. Ungleich benannte Zahlen zu andern von ebensolchen Benennungen zu addiren. (13 Ct. 107 ℔ 29 Lth. + 89 ℔ 7 Lth. + 39 Ct. 80 ℔; 3 Gr. $4\frac{5}{8}$ Pf. + 7 Rtl. 9 Pf. + 5 Rtl. 20 Gr. $\frac{7}{12}$ Pf. — Man schreibe die Zahlen von gleichen Benennungen untereinander. Dann addire man zuerst die Zahlen der niedrigsten Benennung wie unbenannte, hebe aus ihrer Summe die Einheiten der zunächst höhern Benennunz heraus, und setze den Rest als eine Zahl der niedern Benennung und als einen Theil der ganzen Summe an. Ebenso addire man die Zahlen der zunächst höhern Benennung, zähle aber auch die vorher ausgehobenen Einheiten dieser Benennung dazu. Und so verfahre man bis zu den Zahlen der höchsten Benennung. Die Summe der höchsten Benennung macht dann mit den Resten der andern Benennungen zusammen die ganze zusammengesetzte (sogenannte) Summe aus.

24

13 C. 107 ℔ 29 L. 3 G. $4\frac{5}{8}$ Pf. – 15
• 89 – 7 – 7 R. • – 9 –
39 – 80 – • – 5 – 20 – $\frac{7}{12}$ – – 14
2 1 1 1 1

277 | 110 36 | 32 24 | 24 14 | 12 29 | 24
220 | 2 C. 32 | 1 ℔ 24 | 1 R. 12 | 1 G 24 | 1 Pf
54 C. 57 ℔ . . 4 L. 13 R. . . . . 2 . . . . . $\frac{5}{24}$ Pf.

§. 331. Ungleichbenannte Zahlen von einer zusammengesetzten größern Summe ebensolcher Benennungen zu subtrahiren. 54 Ct. 57 ℔ 4 Lth. — 39 Ct. 80 ℔, 13 Rtl. 2 $\frac{5}{24}$ Pf. — 3 Gr. $4\frac{5}{8}$ Pf.) — Man setze jede Zahl des Subtrahendus unter die des Minuendus von gleicher Benennung. Dann subtrahire man zuerst die Zahl der niedrigsten Benennung, und setze den Rest als Zahl derselben Benennung und als Theil des ganzen Restes an. Wenn aber die Zahl des Subtrahendus größer ist als die Zahl dieser Benennung des Minuendus, so entlehne man eine Einheit der höhern Benennung, reduzire dieselbe, und zähle sie der zu kleinen Zahl des Minuendus zu, worauf die Subtraktion dieses Theiles möglich ist. Ebenso ziehe man die Zahlen der höhern Benennungen ab. Die Reste aller Benennungen machen zusammen den ganzen Rest aus.

54 C. 57 ℔ 4 L. (24) 24 24
39 - 80 - .
13 Rl. . - 2 $\frac{9}{24}$ Pf. 1 - $\frac{5}{29}$
14. C. 87 ℔ 4 L. 3 G. 4 $\frac{5}{8}$ - 3 - 15
12 Rl. 20 G. 9 . . . . . . $\frac{14}{24}$ P.

§. 332. Eine benannte Zahl mit einer unbenannten zu multiplizіren (18 Gr. × 27; 2½ Lth. × 17¼). — Die Verrichtung ist ebenso, wie wenn beide Faktoren unbenannt wären; das Produkt bekommt die Benennung des Multiplikandus, worauf man die etwa darin enthaltenen Einheiten größerer Benennung heraushebt. (18 Gr. × 27 = 486 Gr. = 20 Rl. 6 Gr.; $\frac{5}{2}$ L. × $\frac{69}{4}$ = $\frac{345}{8}$ L. = 43$\frac{1}{8}$ L.

§. 333. Ungleichbenannte Zahlen mit einer unbenannten zu multiplizіren. (10 Rl. 6 Gr. 3 Pf. × 23; 2 C. 6$\frac{3}{8}$ ℔ × 15). — *a*. Man reduzire die ungleichbenannten auf eine Zahl von der niedrigsten Benennung und verfahre dann nach §. 332., (2955 Pf. × 23 = 67965 Pf. = 235 Rl. 23 Gr 9 Pf.; $\frac{1811}{8}$ ℔ × 15 = $\frac{27165}{8}$ ℔ = 30 C. 95$\frac{5}{8}$ ℔); oder *b*. man multiplizire die einzelnen gegebenen Zahlen von der niedrigsten Benennung an, und zähle die aus jedem Produkt ausgehobenen Einheiten höherer Benennung dem Produkte dieser zu. Die einzelnen Produkte (oder deren Reste) machen zusammen das ganze Produkt aus.

10 Rl. . . . 6 Gr. . . 3 Pf.
23 23 23
230 Rl. 138 Gr. 69 Pf. | 12
5 Rl. 5 Gr. 60 | 5 Gr.
235 Rl. 143 G | 24 9 Pf.
120 | 5 R.
23 Gr.

2 Cent. . . $6\frac{3}{8}$ ℔
15 8
30 Cent. $\frac{51}{8}$ ℔ × 15
51
15
$\frac{765}{8}$ ℔ = $95\frac{5}{8}$ ℔.

334. Eine benannte Zahl und auch eine Summe von gleichbenannten Zahlen mit einer unbenannten zu dividiren. (59 Rl. : 9; 10 C. 8 ℔ 4 L. : 7; $\frac{3}{4}$ Mtz. : $\frac{5}{7}$). — *a*. Die Theilung jeder benannten Zahl wird ebenso verrichtet, wie die einer unbenannten, und wenn der Divisor unbenannt ist, so bekommt der Antheil die Benennung des Dividendus. Den Rest, welcher ein Bruch derselben Benennung wird, pflegt man auch auf eine geringere Benennung zu reduziren, worauf er, um keinen unechten Bruch zu haben, abermals mit dem Nenner, d. h. mit dem vorigen Divisor getheilt wird. *b*. Ungleichbenannte Zahlen können entweder sogleich auf die niedrigste Benennung reduzirt, und dann die eine wie vorher dividirt und wieder die Einheiten der höhern

Benennung ausgehoben werden, oder zuerst die der **höchsten** Benennung **allein** getheilt, deren **Rest** auf die folgende Benennung **reduzirt** und die vorhandene Zahl dieser Benennung dazu **addirt**, dann diese **Summe dividirt**, und so bis zur niedrigsten Benennung fortgefahren werden. Die einzelnen Antheile, welche die Benennungen ihrer Dividenden bekommen, machen **zusammen den ganzen Antheil** aus.

58 Rl. | 9
54 | $6\frac{5}{9}$ Rl.
5

59 Rl. | 9
5 | 6 Rl.
24
120 Gr. | 9
3 | 13 G.
12
36 Pf. | 9
4 Pf.

10 C. 8 ℔ 4 L =
35200 L. | 7
20 | $5028\frac{4}{7}$ L. =
60 | 1 C. 47 ℔ $4\frac{4}{7}$ L.
4

10 C. 8 ℔ 4 L
3 | 7
110 | 1 C.
330 ℔ | 7
1 | 47 ℔
32
32 L | 7
4 | 4 L.
4
16 Q. | 7
2 | $2\frac{2}{7}$ Q.

$\frac{3}{4}$ Mk. : $\frac{5}{7}$ = $\frac{21}{20}$ M. = $1\frac{1}{20}$ M.

§. 335. Zu bestimmen, wievielmal eine benannte oder eine Summe ungleichbenannter Zahlen in einer andern dergleichen enthalten sei; (wievielmal 3 Gr. in 20 Gr.? 3 Gr. in 4 Rl.? 2 Gr. 4 Pf. in 3 Rl. 8 Gr.? $\frac{5}{7}$ Pf. in 10 Pf.?) — Dies wird durch Division der letzten Zahl oder Summe mit der ersten bewirkt, wobei sowohl der Dividendus wie der Divisor auf eine Zahl, und zwar beide von gleicher Benennung, reduzirt werden müssen. Der Quotient ist dann immer eine unbenannte Zahl.

20 Gr.	3 Gr.	96 Gr.	3 Gr.
2	$6\frac{2}{3}$ mal.		32 mal.

1536 Pf.	28 Pf.	10 Pf. : $\frac{5}{7}$ Pf. = $\frac{70}{5}$ = 14 mal.
136	$54\frac{1}{2}$ mal.	
14		

§. 336. Jede einfache Proportionsrechnung anzusetzen. (Regel de tri.

1) Wieviel gelten 3 C. 7 Pf. 8 L. ebensolcher Waare, von welcher man für 2 Rl. 8 Gr. 3 Pfd. erhält.

2) An einem Graben wurden (in einer gewissen Zeit) 32 Ruthen von 25 Arbeitern zu Stande gebracht, wieviel würden 70 Arbeiter (in derselben Zeit) davon verfertigt haben?

3) Wie lange werden 25 Mann an 32 Ruthen arbeiten, wenn sie auf 100 Ruthen 5 Tage zugebracht haben?

4) Von $2\frac{1}{4}$ Ellen breitem Zeuge brauche ich zu einem Kleide $3\frac{1}{2}$ Elle (Länge), wieviel werde ich von $1\frac{3}{4}$ breitem nöthig haben?

5) Wie lange würden 25 Mann an einer Maner von 10 Ruthen Länge, 8 Fuß Höhe und 2 Fuß

Dicke

Dicke arbeiten, wenn 30 Mann sie in 4 Tagen vollbringen?

6) Wenn 100 Thlr. Capital 4 Rtlr. 12 Gr. jährliche Zinsen ($4\frac{1}{2}$ pro Cent) einbringen, was bringen 700 Rtlr. ein?

7) In 3 Tagen marschirten 2000 Mann 16 Meilen weit, wieviel Meilen würden 12000 Mann bei derselben Schnelligkeit zurücklegen?

8) Was kostet der Scheffel Hafer, wenn man 7 Metzen mit 20 Gr. bezahlt?

9) Wieviel kann derjenige täglich ausgebrn, welcher jährlich 600 Rtlr. einnimmt?

a. Man überlege zuerst, ob die Aufgabe überhaupt zur Regel de tri gehöre. Dies ist nämlich dann der Fall, wenn sie 3 Benennungen enthält, zu welchen eine 4te gesucht wird, die mit den gegebenen eine (richtige oder umgekehrte) Proportion bilden soll, und dazu gehört natürlich, daß 2 der gegebenen Benennungen wirklich mit einander in einem (geraden oder indirekten) Verhältnisse stehen, eine dieser beiden aber der 3ten gegebenen, welche der Fragesatz genannt wird, und die andere der gesuchten gleichlautet. Solche Benennungen und ihre Verhältnisse müssen öfters erst aus einer verwickelten Aufgabe, in welcher sie sehr versteckt oder mangelhaft ausgedrückt liegen, herausgesucht werden, und besonders muß man bemerken, daß Namen von Dingen verschiedener Größe, aber doch gleicher Gattung auf gleiche Benennungen gebracht werden können.

1) Die Pfunde stehen mit den Thalern und Groschen in einem geraden Verhältniß, denn diese sind der Preis für jene als Waare, welcher mit

dieser

dieser gleich wächst oder abnimmt; die Cent., Pfd. und Lth. machen mit dem vorigen Pfd. eine gleiche Benennung aus, denn sie sind Maaße derselben Waare, und übrdies können die ungleichen Gewichte gleich gemacht werden; aber die 4te Benennung, welche gesucht wird, soll der Preis dieses letzten Maaßes der Waare sein, ist also mit den Thalern und Groschen auch gleiche Benennung, und steht folglich mit diesem Maaße in demselben direkten Verhältniß, wie der gegebene Preis mit dem ersten Maaße.

2) Die ersten Arbeiter stehen mit den Ruthen im geraden Verhältniß der Kraft nnd Wirkung, und die andern Arbeiter werden mit der gesuchten Wirkung in demselben geraden Verhältniß stehen, da ihnen dieselbe Zeit wie den ersten gegeben wird, welches sich immer von selbst versteht, wenn keine Ungleichheit der Zeit ausdrücklich angegeben ist.

3) Die letzten Ruthen stehen mit den Tagen im direkten Verhältniß der Wirkung und dazu gehörigen Zeit, und die ersten Ruthen werden mit der gesuchten Zeit in demselben Verhältniß stehen, da bei beiden dieselben Arbeiter wirken, welches hier ausdrücklich durch 25 Mann und sie angegeben ist, weswegen auch die 25 Mann gar nicht mit in die Rechnung kommen, weil dieser Zusatz überflüssig ist, da die Gleichheit solcher Nebenumstände immer stillschweigend angenommen wird; wenn aber auch noch ungleiche Arbeiter angegeben wären, so gehörte die Aufgabe zur Regel quinque.

4) Die Breite des ersten Zeuges steht mit der gebrauchten Anzahl Ellen Länge im umgekehrten Verhältniß, weil diese ebenso hätte wachsen müssen, wie jene abgenommen hätte; die andere Breite steht mit der gesuchten Länge in demselben indirekten Verhältniß, da der Nebenumstand der Größe der Person bei beiden Be-

dürfnissen derselbe ist, welches das zweimalige ich anzeigt.

5) Hier ist wieder die Länge, Breite und Höhe der Mauer gar nicht mit anzusetzen, da alle diese Bestimmungen durch das Wort sie als zum zweitenmal ebenso angegeben werden, daher ist es gleichfalls eine Regel de tri-Rechnung, weil die letzten Mann mit den Tagen als Kraft und Zeit ihrer Anwendung im umgekehrten, und die ersten Mann mit den gesuchten Tagen in ebensolchem Verhältniß stehen.

6) Hier könnte es scheinen, als wären alle 3 Benennungen gleich (Thaler); aber die ersten Thaler sind Capital, die zweiten sind Zinsen, welche als benutzte Sache und deren Nutzen im geraden Verhältniß stehen, und ebenso verhalten sich die letzten Thaler, die durch das Wort einbringen auch als Capital bezeichnet werden, zu den gesuchten Zinsen, da der Nebenumstand jährlich als zweimal gleich angenommen wird.

7) Die Beantwortung dieser Frage eignet sich gar nicht zur Regel de tri, denn die Mann stehen mit den Meilen weder im direkten noch umgekehrten Verhältniß, weil die Anzahl der Meilen nicht dadurch wachsen oder abnehmen kann, daß mehr oder weniger Leute zusammen marschiren.

8) Hier scheinen nur 2 Sätze gegeben zu sein, weil bei den ersten Scheffeln die Zahl fehlt, das Wort der soll aber 1 bedeuten, Scheffel können aber auch zu Metzen gemacht werden.

9) Hier sind zwei gleiche Benennungen unter den Wörtern täglich und jährlich verborgen, welche 1 Tag und 1 Jahr bedeuten, und 1 Jahr kann zu Tagen gemacht werden; das gesuchte Geld steht aber mit dem Tage in demselben geraden Verhältniß wie das gegebene mit dem Jahre, obgleich dieses eingenommen wird und jenes ausgegeben wer-

den soll, denn das auszugebende muß gleichfalls eingenommen sein.

b. Darauf setze man den Frage-Satz, d. h. den Satz, worin das Frage-Wort (nicht immer das Frage-Zeichen) vorkommt, hinten, d. h. zur Rechten, den von ebensolcher Benennung ganz vorn, d. h. zur Linken, und denjenigen, welcher mit diesen in Verhältniß steht, dessen Benennung nur erst einmal vorkommt, in die Mitte.

1) 3 Pfd. g. 2 Rl. 8 Gr., w. 3 C. 7 Pfd. 8 Lth?
2) 25 A. m. 32 R., w. 70 A.?
3) Zu 100 R. g. 5 T., w. z. 32 R.?
4) V. $2\frac{1}{4}$ Elle Br. brauche ich $3\frac{1}{2}$ Elle L., w. v. $1\frac{3}{4}$ Elle Br.
5) 30 M. brauchen 4 T., w. 25 M.?
6) 100 Rl. C. g. 4 Rl. 12 Gr. Z., w. 700 Rl. C.?
8) 7 M. k. 20 Gr., w. 1 Sch.?
9) Für 1 J. Einn. 600 Rl. w. f. 1 Tag.?

c. Dann sorge man durch nöthige Reduktion dafür, daß in jedem Satze nur eine Zahl vorkomme, und diese im 1sten und 3ten Satze von gleicher Benennung sei, wobei auch die vorkommenden gemischten Zahlen in bloße unechte Brüche zu verwandeln sind.

1) 96 Lth. g. 56 Gr., w. 10792 Lth.?
4) Von $\frac{9}{4}$ Elle Br. brauche ich $\frac{7}{2}$ Elle L., w. v. $\frac{7}{4}$ Elle Br.?
6) 100 Rl. C. g. 108 Gr. Z., w. 700 Rl. C.?
8) 7 M. k. 20 Gr., w. 16 M.?
9) Für 365 T. 600 Rl., w. f. 1 T.?

d. Man untersuche, ob die Rechnung zur geraden oder umgekehrten Regel de tri gehöre, wobei man nur zu fragen braucht: wenn die Zahl der ersten Benennung verdoppelt

pelt wird, muß dann die Zahl der zweiten auch verdoppelt, oder im Gegentheil halb so groß werden? der erste Fall gehört zur geraden, der letzte zur umgekehrten Regel.

1) 96 L. g. 56 Gr., wieviel 192 L.? — offenbar 112 Gr., also gerade Regel.

2) 25 Arb. machen 32 R., wieviel 50 A.? — 64 R., also gerade Regel.

3) Zu 100 R. gehörten 5 T., wieviel zu 200 R. — 10 T., gerade Regel.

4) Von $\frac{9}{4}$ Ellen Br. brauche ich $\frac{7}{2}$ Elle Länge, wieviel von $\frac{18}{4}$ Ell. Br.? — nur $\frac{7}{4}$ Ell., umgekehrte Regel.

5) 30 M. brauchten 4 T. dazu, wieviel T. brauchen 60 M. dazu? — nur 2 T., umgekehrte Regel.

6) 100 Rl. C. geben 108 Gr. Z., wieviel geben 200 Rl. C.? — 216 Gr. gerade Regel.

8) 7 M. k. 20 Gr., wieviel 16 M.? — 40 Gr., gerade Regel.

9) Für 365 T. hat er 600 Rl., wieviel für 730 T.? — 1200 Rl., gerade Regel.

e. Zuletzt versetze man den bisher hinten stehenden Fragesatz, und zwar bei der geraden Regel in die Mitte, bei der umgekehrten ganz vorn, wodurch die 3 gegebenen Sätze mit dem gesuchten 4ten, den man vorläufig x nennt, in eine Zahlenproportion kommen.

1) 96 L. : 10792 L. = 56 Gr : x Gr.
2) 25 A. : 70 A = 32 R. : x R.
3) 100 R. : 32 R. = 5 T. : x T.
4) $\frac{7}{4}$ Ell. Br. : $\frac{9}{4}$ Ell. Br. = $\frac{7}{2}$ Ell. L. : x Ell. L.
5) 25 M. : 30 M. = 4 T. : x T.
6) 100 Rl. C. : 700 Rl. C. = 108 Gr. Z. : x Gr. Z.
8) 7 M. : 16 M. = 20 Gr. : x Gr.
9) 365 T. : 1 T. = 600 Rl. : x Rl.

§. 337.

§. 337. Jede angesetzte Proportionsrechnung auszuführen. (Vorige Ansätze unter *e*.) — *a*. Man multiplizire das 3te Glied mit der Zahl des 2ten, und theile das Produkt mit der Zahl des 1sten Gliedes.

b. Wenn in dem Ansatz Brüche vorkommen, so multiplizire man zuvor den Zähler oder die ganze Zahl des 1sten Gliedes mit den Nennern des 2ten und 3ten, und den Zähler oder die ganze Zahl des 2ten oder 3ten mit dem Nenner des 1sten Gliedes, worauf die Proportion bloß aus ganzen Zahlen besteht, und verfahre dann erst nach *a*.

c. Nach der Verrichtung *a*. erhält das gefundene 4te Glied die Benennung des 3ten, welche, wo möglich, auf höhere Benennungen zu reduziren ist.

1) 56 Gr. $\times$ 10792 $=$ 604352 Gr.; 604352 Gr. : 96 $=$ 6295$\frac{32}{96}$ Gr. $=$ 263 Rl. 7$\frac{1}{3}$ Gr.

2) 32 R. $\times$ 70 $=$ 2240 R.; 2240 R. : 25 $=$ 89$\frac{21}{25}$ R.

3) 5 T. $\times$ 32 $=$ 160 T.; 160 T. : 100 $=$ 16 : 10 $= \frac{16}{10} = \frac{8}{5} = 1\frac{3}{5}$ T.

4) 7 $\times$ 4 $\times$ 2 Ell. B. : 9 $\times$ 4 Ell. B. $=$ 7 Ell. L. : x Ell. L.; 7 Ell. $\times$ 36 $=$ 252 Ell.; 252 Ell. : 56 $=$ 4$\frac{1}{2}$ Ell. L.

5) 4 T. $\times$ 30 $=$ 120 T.; 120 T. : 25 $=$ 4$\frac{4}{5}$ T.

6) 100 : 700 $=$ 1 : 7; 108 Gr. $\times$ 7 $=$ 756 Gr.; 756 Gr. : 1 $=$ 756 Gr. $=$ 31$\frac{1}{2}$ Rtl. Z.

8) 20 Gr. $\times$ 16 $=$ 320 Gr.; 320 Gr. : 7 $=$ 45$\frac{5}{7}$ Gr. $=$ 1 Rl. 21$\frac{5}{7}$ Gr.

9) 600 Rl. $\times$ 1 $=$ 600 Rl.; 600 Rl. : 365 $=$ 1$\frac{235}{365}$ Rl. $=$ 1 Rl. 15 Gr. 5$\frac{31}{73}$ Pf.

§. 338. Jede zusammengesetzte Proportionsrechnung anzusetzen und auszuführen. An einer Mauer von 8 Fuß Höhe und 2 Fuß

Dicke

Dicke vollbringen 30 Mann in 4 Tagen eine Länge von 10 Ruthen, wieviel Länge einer Mauer von 9 Fuß Höhe und $2\frac{1}{2}$ Fuß Dicke werden 25 Mann in 6 Tagen aufführen? —

a. Man bringe alle Fragesätze zur Rechten untereinander, und alle Sätze von denselben Benennungen (nach etwa nöthiger Reduktion) ihnen gegenüber zur Linken, den Satz mit einzelner Benennung aber (10 R. Länge), dessen Benennung auch die gesuchte Zahl bekommen soll, als zu allen Vorder- und Hintersätzen gehörig, in die Mitte.

$$\left.\begin{array}{l}1)\ \ 8\text{ F. H.}\\ 2)\ \ 2\text{ F. D.}\\ 3)\ 30\text{ M.}\\ 4)\ \ 4\text{ T.}\end{array}\right\}\ 10\text{ R. L.}\ \left\{\begin{array}{l}9\text{ F. H.?}\\ \frac{5}{2}\text{ F. D.?}\\ 25\text{ M.?}\\ 6\text{ T.?}\end{array}\right.$$

b. Dann betrachte man jedes einander gegenüberstehende Paar Benennungen mit der mittelsten zusammen als einen für sich allein dastehenden Aufsatz, wobei man jedesmal die übrigen Vorder und Hintersätze als zweimal gleiche Nebenumstände ansieht, und untersuche nach §. 336. *d.*, welche von ihnen zur geraden, und welche zur umgekehrten Regel de tri gehören.

Hier wird man den 3ten und 4ten zur geraden, den 1sten und 2ten zur umgekehrten Regel gehörig finden.

c. Die zur umgekehrten Regel gehörigen Vorder- und Hintersätze vertausche man gegeneinander, das bisherige einzelne Mittelglied setze man gleichfalls zu den Hintergliedern, und die Nenner der etwa vorkommenden Brü-

che

che bringe man als ganze Zahlen auf die entgegengesetzten Seiten, worauf die Zähler auch als ganze Zahlen auf ihren Seiten stehen bleiben.

1) 9 F. H.	8 F. H.
2) 5 F. D.	2 F. D.
3) 30 M.	25 M.
4) 4 T.	6 T.
	10 R. L.
	2 (Nenner v. 5.)

d. Darauf multiplizire man alle Vorder- und alle Hinterglieder untereinander, dividire das Produkt der letzten mit dem der ersten, und gebe dem Quotienten die Benennung des gewesenen Mittelgliedes. $8 \times 2 \times 25 \times 6 \times 10 \times 2 = 48000$; $9 \times 5 \times 30 \times 4 = 5400$; $48000 : 5400 = 480 : 54 = 8\frac{8}{9}$ Ruthen Länge.

e. Hebungen mancher Zahlen der Vordersätze gegen die der Hintersätze durch gemeinschaftliche Maaße werden diese Verrichtung sehr verkürzen.

§. 339. Eine Reduktions-Rechnung anzusetzen und auszuführen.

Wieviel Thaler schlechte Münze betragen 30 Thaler Gold, 8 Gr. Agio auf 5 Thaler gerechnet?

a. Man setze die Benennung, deren Zahl man sucht, mit dem Fragezeichen in einen Vordersatz, und ihr gegenüber in einen Hintersatz die gegebene Größe, welche reduzirt werden soll. Im 2ten Vordersatze fange man wieder mit der letzten Benennung an, setze ihr gegenüber eine andere Benennung, welche zwischen ihr und der Benennung des Fragezeichens liegt, und setze zu beiden solche Zahlen, welche Glieder ihres Verhältnisses gegeneinander sind. Mit solchen Zwischen-Verhältnissen fahre man fort, bis man in einem Hintersatze mit der Benennung des Fragezeichens aufhören kann. (Ketten-Satz.)

? Rl. schl. M.	—	—	30 Rl. Gold,
5 Rl. Gold	—	—	128 Gr. Courant,
24 Gr. Cour.	—	—	42 Gr. schl. M.
24 Gr. schl. M.	—	—	1 Rl. schl. M.

b. Das Produkt sämmtlicher Hinterglieder dividire man mit dem Produkt der Vorderglieder, und gebe dem Quotienten die Benennung des Fragezeichens. (161280 : 2880 = 56 Rl. schl. M.

c. Die gegenseitige Hebung und die Vorsetzung der Nenner von Brüchen auf die andern Seiten macht auch diese Rechnung sehr bequem.

§. 340. Repartitions-Rechnungen auszuführen.

1) 1000 Rl. in 4 solche Theile zu zerlegen, die sich zu einander verhalten wie 4, 5, 7, 9.

2) A und B handeln zusammen, A mit 12000 Rl., B mit 8000 Rl. Nach 2 Jahren, (da sie nicht wissen, wie sie stehen) tritt C mit 18000 Rl. zu ihnen, und 3 Jahr darauf, wo sie 60000 Rl. in Kasse haben, trennen sie sich wieder; wieviel bekommt jeder?

a. Man addire die Zahlen, welche die verlangten Verhältnisse anzeigen, und führe dann aus dieser Summe, jedem ihrer Theile und der zu theilenden Zahl soviel einzelne Proportions-Rechnungen aus, wieviel Theile gesucht werden.

4 25 : 4 = 1000 Rl. : x Rl. = 160 Rl.
5 25 : 5 = 1000 — : x — = 200 —
7 25 : 7 = 1000 — : x — = 280 —
9 25 : 9 = 1000 — : x — = 360 —
25 1000 Rl.

b. Bisweilen müssen aber die Zahlen, welche die Verhältnisse der Theile bestimmen, erst aus mehrern Angaben zusammengesetzt werden, z. B. aus dem Capital, womit jemand, und der Zeit, in welcher er damit handelt. Diese werden nämlich mit einander multiplizirt, und dann erst ihre Produkte als die richtigen Verhältnißzahlen angenommen.

A 1[illegible]000 Rl. × 5 J. = 60000
B [illegible]000 — × 5 — = 40000
C 18000 — × 3 — = 54000
154000

A 154 : 60 = 22000 Rl. : x Rl. = $8571\frac{3}{7}$
B 154 : 40 = 22000 — : x — = $5714\frac{2}{7}$
C 154 : 54 = 22000 — : x — = $7714\frac{2}{7}$
22000 Rtl.

Zu diesen Antheilen am Gewinn erhält noch jeder sein Capital.

§. 341. **Vermischungs-Rechnungen** auszuführen.

Es wird eine Sorte Wein zu 20 Gr. verlangt, und der Kaufmann will solche aus den Sorten zu 17 Gr. und 1 Rl. 4 Gr. mischen, wieviel Quart wird er von jeder Sorte nehmen müssen?

Man nehme die Differenzen des **mittlern** Preises von jedem andern, dann ist **seine** Differenz von dem **höchsten** Preise die Zahl der Quarte des **geringsten** Preises, und die Differenz **dieses** vom **mittlern** die Zahl der Quarte des **höchsten** Preises.

28 — 20 = 8; 8 × 17 Gr. = 136 Gr.
20 — 17 = 3; 3 × 28 — = 84 —

11 Qu. . . . . 220 Gr.
1 Qu. . . . . 20 Gr.

§. 342. Eine zusammengesetzte Zinsrechnung auszuführen.

Wieviel Prozent (d. h. Rl. jährliche Zinsen von 100 Rl. Capital) beträgt es, wenn der Wucherer für 1 Rl. wöchentlich 3 Pf. nimmt.

Man suche die mehrern gegebenen Vorder- und Hinterglieder und das eine Mittelglied heraus, setze sie nach der zusammengesetzten Proportions-Rechnung an, und gebe dem gefundenen 4ten Gliede die Benennung des Mittelgliedes.

$$\left.\begin{array}{l}1 \text{ Rl. Cap.}\\ 1 \text{ W.}\end{array}\right\} 3 \text{ Pf. Z.} \left\{\begin{array}{l}100 \text{ Rl. C. ?}\\ 52 \text{ W. ?}\end{array}\right.$$

3 Pf. × 5200 = 15600 Pf.; 15600 Pf. : 1 = 15600 Pf. = 54⅙ Rtl. jährl. Zinsen.

Geometrie.

Erster Abschnitt.

Erklärungen.

§. 343.

Die Geometrie oder (Feld=) Meßkunst ist der Theil der Mathematik, welcher die Natur und Verhältnisse der Ausdehnungen kennen, und dadurch unbekannte Größen der Ausdehnung aus ihren Verhältnissen (Verbindungen) mit bekannten finden lehrt. Ausdehnung nennt man die Eigenschaft eines Dinges, daß seine Theile sich nebeneinander befinden und zusammenhangen. Das gewöhnliche Messen (das mechanische, wozu es keiner Wissenschaft bedarf), besteht darin, daß man eine bekannte Größe, die man ein Maaß nennt, (z. B. einen Fuß, einen Quadratzoll) nach

nach und nach so oftmal, wie es angeht, auf die unbekannte Größe auflegt, und dadurch auch diese genau kennen lernt. So kann man aber nicht immer die Größen messen, die man wissen will, (z. B. die Höhe eines Baums, die Entfernung zweier Gegenstände von einander, die jenseit eines Flusses liegen, (Tafel II. Zeichnungen 69 und 68.); dieselben findet man nach der Geometrie durch ihren Zusammenhang mit solchen Größen, die man messen kann. Ja, die Menschen haben es durch Hülfe dieser Wissenschaft so weit gebracht, daß sie die Entfernungen der Gestirne bestimmen können.

§. 344. Den Theil der Geometrie, welcher bloß Entfernungen oder Längen finden lehrt, pflegt man Längenmessung (Longimetrie) zu nennen, zur Bestimmung der Flächenräume führt die Flächenmessung (Epipedometrie, Planimetrie), und die Bestimmung des Raums, welchen Körper einnehmen oder einnehmen können, welchen Raum selbst man schon einen geometrischen Körper nennt, lehrt die Körpermessung (Stereometrie). Die Anwendung ihrer Lehren auf Gegenstände der Erde wird die ausübende, praktische (Feld-) Meßkunst genannt.

§. 345. Ein geometrischer Körper ist jeder Raum von dreifacher Ausdehnung, (T. III. Z. 14), die man gewöhnlich seine Länge, Breite und Dicke nennt. (Eine leere Grube ist demnach auch ein Körper.)

§. 346. Die Gränze einer Größe ist die Stelle, wo ihre Ausdehnung aufhört.

§. 347. Jeder Körper hat auf allen Seiten seine Gränzen; den Zusammenhang aller dieser Gränzen nennt man die Oberfläche des Körpers, (die sich also nicht bloß auf einer Seite, sondern um den ganzen Körper herum befindet).

§. 348. Die Oberfläche eines Körpers und jeder Theil derselben hat nur eine zweifache Ausdehnung, Länge und Breite, (denn was noch eine dritte hat, sei die Dicke auch noch so gering, z. B. ein Blatt Papier, ist schon ein Körper). Jeder Raum von zweifacher Ausdehnung wird überhaupt eine Fläche (ein Flächenraum) genannt.

§. 349. Der Zusammenhang der Gränzen einer Fläche und jeder Theil desselben hat nur eine Ausdehnung. Jede einfache Ausdehnung wird eine Linie genannt.

§. 350. Eine Linie hat 2 Gränzen, welche ihre Endpunkte, oder ihr Anfangs- und Endpunkt genannt werden. Ein Punkt ist eine Stelle ohne alle Ausdehnung. (Allenthalben kann man sich Punkte denken, aber sie stehen nur an den Gränzen der Linien, und jedes auch noch so feine Pünktchen, welches man mit Farbe sichtbar macht, ist nur das Zeichen eines geometrischen Punktes, kein wirklicher Punkt. Auch die sogenannten Linien, die mit Farbe gezogen werden, sind nur Zeichen geometrischer Linien).

§. 351.

§. 351. Eine solche Linie, welche in allen ihren Theilen nur eine und dieselbe Richtung hat; wird eine gerade Linie genannt, (Taf. II. Zeichn. 88, aoq,) eine solche hingegen, die beständig ihre Richtung verändert, (abcdeq) heißt eine krumme Linie. Einen Zusammenhang von geraden und krummen Linien pflegt man wohl eine gemischte Linie zu nennen.

§. 352. Ein Flächenraum, welcher so beschaffen ist, daß man von jedem Punkte desselben zu jedem andern eine gerade Linie ziehen kann, die beständig die Fläche berührt, heißt eine ebene Fläche, eine Ebene; eine solche hingegen, auf welcher man keine gerade Linie ziehen kann, wird eine krumme Fläche genannt, eine solche endlich, auf welcher sich zwar in der Richtung der einen Ausdehnung gerade Linien ziehen lassen, aber in der Richtung der zweiten Ausdehnung und in allen Nebenrichtungen keine einzige gerade Linie gezogen werden kann, z. B. die Fläche einer Säule könnte man eine gekrümmte Fläche nennen.

§. 353. Eine Ebne, die von einer oder mehrern Linien ganz eingeschlossen ist, wird eine (ebne) Figur genannt, und zwar eine geradlinichte oder krummlinichte oder gemischtlinichte, jenachdem sie von lauter geraden (T. I. Z. 16, 22, 24.) oder krummen (Z. 1.) oder beiderlei Linien (Z. 51, 80, 88, 96.) eingeschlossen ist, welche die Seiten der Figur heißen, nach deren Anzahl eine geradlinichte

Figur eine dreiseitige, (Z. 16, 26.) vierseitige (Z. 22, 23.) oder mehrseitige (Z. 24, 84.) Figur, oder auch, weil jede ebensoviel Ecken wie Seiten hat, ein Dreieck, Viereck oder überhaupt ein Vieleck genannt wird.

§. 354. Eine krumme Linie (T. I. Z. 45., ACBDFA), die einen ebnen Flächenraum so einschließt, daß sie von einem Punkte desselben (o) allenthalben gleichweit entfernt ist, heißt eine Kreislinie, ein Kreisumfang, eine Peripherie; die von ihr eingeschlossene Ebne heißt die Kreisfläche oder Kreisfigur, und der Punkt derselben, von welchem die Peripherie allenthalben gleichweit entfernt ist, wird ihr und der Kreislinie Mittelpunkt genannt. Die Entfernung des Umfanges vom Mittelpunkte oder jede gerade Linie, welche zwischen dem Mittelpunkte und der Peripherie gezogen ist, (OA, OD, OF) heißt ein Radius oder Halbmesser des Kreises. Jede gerade Linie, die von einem Punkte der Peripherie zu einem andern Punkte derselben gezogen ist, (AB,AD) heißt eine Sehne; eine solche Sehne, welche durch den Mittelpunkt geht, (AD, oder 2 Radien, AO und OD, die zusammen eine gerade Linie AD bilden), wird ein Durchmesser oder Diameter des Kreises genannt. Jeder Theil des Umfangs heißt ein Bogen (CB, BD, DF, FA, AFD, FDBCA).

§. 355. Eine Figur, die von einem Kreisbogen und der ihn bespannenden Sehne eingeschlossen ist, heißt ein Kreis-Abschnitt (Z.

45, ACBA, ACBDA, AFDA, Zeichnung 48, DABCED, Z. 51, ARBA); eine solche, die von 2 Radien und dem dazwischen liegenden Bogen gebildet wird, heißt ein Kreis-Ausschnitt (Z. 46, ACCA, ACDA, Z. 96, DABD).

§. 356. Jeden Kreisumfang denkt man sich in 360 (°) gleiche Theile getheilt, welche man Grade nennt; ein Grad ist also ein Kreisbogen, der genau den 360sten Theil der Peripherie ausmacht. Die Grade gleicher Kreise, d. h. die mit gleichen Radien gebildet sind, müssen daher auch gleich groß sein, und umgekehrt, wenn die Grade verschiedener Kreise von gleicher Größe sind, so sind auch die ganzen Kreise einander gleich. Ein Grad wird auch noch in 60 (′) Minuten, eine Minute in 60 (″) Sekunden, eine Sekunde in 60 (‴) Tertien eingetheilt.

§. 357. Gerade Linien, die eine solche Lage gegen einander haben, daß sie allenthalben gleichweit von einander entfernt sind, (Z. 11), heißen gleichlaufende, parallele Linien. Dieselben können, wenn sie auch noch so weit verlängert werden, sich auf keiner Seite mehr einander nähern, als auf der andern Seite, weil sie nirgends eine Neigung gegen einander haben. Wenn dagegen zwei gerade Linien sich auf einer Seite gegen einander neigen, so werden dieselben, wenn man sie auf dieser Seite verlängert, einander immer näher kommen, und, hinlänglich fortgezogen, in einem Punkte

sich

sich treffen, d. h. sich schneiden, und nach dem Durchschnitt, noch verlängert, sich immer weiter von einander entfernen; auch auf der andern Seite verlängert, entfernen sie sich immer mehr von einander (Z. 2.)

§. 358. Die Neigung zweier sich schneidenden geraden Linien gegen einander (Z. 5, 10), heißt ein (ebner) Winkel; die Linien, welche den Winkel bilden, heißen die Schenkel, (AB und AC), und der Punkt, wo sie sich schneiden (A), der Scheitel, die Spitze des Winkels. Die Größe eines Winkels hängt nicht von der Länge seiner Schenkel ab, sondern von ihrer mehrern oder geringern Neigung gegen einander, oder von der Oeffnung, welche sie gleich am Scheitel bilden. Zwei Winkel sind daher einander gleich, wenn ihre Oeffnungen auf einander passen, wenn auch ihre Schenkel von ganz ungleicher Länge sind (2.) Man benennt einen Winkel entweder durch einen Buchstaben, der außerhalb desselben an der Spitze steht (Z. 5, A), oder durch einen, den man innerhalb desselben an die Spitze setzt (Z. 7, q), oder durch 3 äußere Buchstaben, unter welchen derjenige, der an der Spitze steht, immer in der Mitte genannt werden muß (5, BAC oder CAB).

§. 359. Ein Winkel, welcher genau eine solche Größe hat (Z. 36, CBA, 31, n), daß durch die Verlängerung jedes Schenkels an der Spitze mit dem andern Schenkel noch ein Winkel von ebender Größe, wie die seinige, gebildet wird,

heißt

heißt ein rechter Winkel. Jeder Winkel, der größer ist als ein rechter, (Z. 7, p, bei welchem also durch Verlängerung eines Schenkels ein kleinerer als er selbst entsteht), heißt ein stumpfer, und jeder kleinere als ein rechter (q), heißt ein spitzer Winkel. Sowohl stumpfe wie spitze werden schiefe Winkel genannt.

§. 360. Zwei Linien, welche zusammen einen rechten Winkel bilden, werden gegen einander senkrechte, lothrechte oder perpendikuläre Linien genannt (Z. 6, AB und CB, AB und BD, Z. 15, EC und AC); auch die Verlängerung der einen (Z. 15, CD oder CB) ist dann gegen die andere (EC) senkrecht, und diese gegen sie; doch nennt man gewöhnlich nur den einen Schenkel eines rechten Winkels eine senkrechte Linie gegen die andere oder auf der andern, und diese andere nennt man dann gegen jene eine horizontale Linie.

§. 361. Zwei oder mehrere Winkel, die in einer solchen Verbindung stehen (Z. 7, p + q, 15, ACG + GCE + ECD, 20, r + x), daß ihre Scheitel zusammen in einem Punkte liegen, ihrer zwei immer einen gemeinschaftlichen Schenkel haben, ihre beiden äußersten Schenkel aber zusammen eine gerade Linie ausmachen, heißen gemeinschaftlich Nebenwinkel über einer geraden Linie (unter derselben oder auf eine Seite ist einerlei) oder bloß Nebenwinkel. (Einen derselben einen Nebenwinkel des andern zu nennen,

nen, wird nur von wenigen Mathematikern gebilligt).

§. 362. Ein Paar Winkel, welche, von zwei sich durchschneidenden Linien gebildet, genau einander gegenüber liegen (Z. 10, o und x), heißen Scheitelwinkel, Vertikalwinkel. (Zwei einander durchschneidende Linien bilden jederzeit 2 Paar Vertikalwinkel).

§. 363. Wenn zwei gerade Linien von einer dritten durchschnitten werden (Z. 12, n. 1), so entstehen 8 Winkel, von welchen die 4, welche zwischen den beiden ersten Linien liegen, innere, und die andern 4 äußere Winkel genannt werden. Ferner werden diese Winkel eingetheilt in 4 Paar Wechsels-Winkel, nämlich 2 Paar innere und 2 Paar äußere. Ein Paar Wechselswinkel sind 2 äußere oder 2 innere Winkel, die auf verschiedenen Seiten der Durchschnittlinie liegen, aber zusammen keine Nebenwinkel ausmachen, (also innere x und r, n und CFE, äußere o und bei F der Vertikalwinkel von r, und ebenso die beiden übrigen äußern bei E und F). Ferner werden sie eingetheilt in 4 Paar gleichliegende Winkel; ein Paar solcher sind ein innerer und ein äußerer, die auf gleicher Seite der Durchschnittslinie liegen, aber zusammen keine Nebenwinkel sind (also r und o u. s. w.).

§ 364. Die Winkel, welche innerhalb der Seiten einer geradlinichten Figur befindlich sind, werden sämmtlich innere Winkel derselben

ben genannt, ein äußerer Winkel der Figur heißt dagegen ein solcher, den eine Seite derselben mit der Verlängerung einer andern Seite bildet (Z. 18, r).

§. 365. Der Winkel eines Kreisausschnittes, der von 2 Radien gebildet wird (Z. 46, m), heißt ein Winkel am Mittelpunkte; ein solcher Winkel, der von 2 Sehnen gebildet wird, dessen Scheitel also in die Peripherie fällt, wird ein Winkel am Umfange, ein Peripherie-Winkel genannt (Z. 45, BAD); von solchen Winkeln im Kreise sagt man: sie stehen auf dem Bogen, der zwischen ihren Schenkeln liegt.

§. 366. Alle mögliche Dreiecke oder Triangel haben noch verschiedene besondere Namen, sowohl nach ihren Seiten wie nach den Winkeln. Wenn man weiß, daß 2 Seiten eines Dreiecks einander gleich sind, so nennt man dasselbe ein gleichschenklichtes, wenn alle 3 Seiten einander gleich sind, ein gleichseitiges, wenn aber keine Seite der andern gleich ist, ein ungleichseitiges Dreieck. Wenn in einem Dreieck ein rechter Winkel befindlich ist, so heißt dasselbe ein rechtwinklichtes, ist darin ein stumpfer, ein stumpfwinklichtes, (in Zukunft wird es deutlich werden, daß 2 Winkel jedes Triangels spitze seyn müssen,) sind aber alle drei Winkel spitz, so heißt es natürlich ein spitzwinklichtes Dreieck, (künftig wird sich ausweisen, daß ein gleichseitiges immer spitzwinklich sein müsse). Die beiden Seiten

ten eines rechtwinklichten Triangels, welche den rechten Winkel desselben bilden, heißen die Katheten, die Seite aber, welche dem rechten Winkel gegenübersteht, die Hypothenuse des Dreiecks.

§. 367. Alle mögliche Vierecke werden auch nach ihren Seiten und Winkeln verschieden eingetheilt und benannt. Wenn in einem Vierecke beide Paar einander gegenüberstehende Seiten Parallellinien (§. 357) sind (Z. 23, 36), so heißt die Figur ein Parallelogram. Hat ein solches rechte Winkel, so heißt es ein rechtwinkliches (Z. 23, 43), hat es schiefe, ein schiefwinkliches Parallelogramm (Z. 22, 35, 36), (man wird künftig einsehen, daß in keinem Parallelogramm rechte und schiefe Winkel zusammen befindlich sein können). Sind in einem rechtwinklichen Parallelogramm auch alle Seiten gleich, so heißt es ein Quadrat (23), sind nicht alle Seiten gleich, ein längliches Rechteck, rectangulum oblongum (Z. 43). Ein schiefwinklichtes aber gleichseitiges Parallelogramm (Z. 35), wird eine Raute, Rhombus, (auch wohl ein verschobenes Quadrat) und ein schiefwinklichtes, nicht gleichseitiges, eine längliche Raute, Rhomboides (Z. 36) genannt. Ein solches Viereck (Z. 71, CDBEC) welches nur 2 parallele Seiten (CE und DB) hat, wird gewöhnlich ein Trepezium, und ein Viereck mit völlig unparallelen Seiten ein Trapezoides genannt (Z. 79).

§. 368. Da jedes Quadrat lauter gleiche Sei-

Seiten und rechte Winkel hat, so sind alle Theile desselben durch eine einzige Linie (Z. 23, AB) hinlänglich bestimmt, denn über dieser Linie läßt sich durchaus kein anderes Quadrat als dieses denken. Man spricht daher auch öfters von dem Quadrat einer gewissen Linie, welches gar nicht über derselben gezeichnet, aber darüber möglich ist und gedacht wird. Jedes Quadrat ist demnach das Quadrat jeder seiner Seiten, ($AC = AB^2 = AD^2 = BC^2 = DC^2$) und jeder andern ihnen gleichen Linie.

§. 369. Jede gerade Linie, die in einer geradlinichten Figur von einer Ecke zu einer andern nicht benachbarten (also durch den eingeschlossenen Raum hindurch) gezogen ist (Z. 22, DB, Z. 24, AD und AC), wird eine Diagonallinie genannt.

§. 370. Eine geradlinichte Figur, welche lauter gleiche Seiten und Winkel hat (Z. 26, 23, 57, 57, 54), heißt eine reguläre (ordentliche), jede andere eine irreguläre Figur. Wenn durch alle Ecken einer regulären Figur ein Kreisumfang hindurchgeht (Z. 55, 56, 57), so sagt man, er sei um dieselbe beschrieben, und die Figur liege im Kreise.

§. 371. Bei jeder Figur kann man eine beliebige Seite als Grundlinie annehmen (z. B. Z. 20, AB, Z. 16, AC, Z. 23, DC, Z. 71, AB vom Dreieck und Parallelogramm, Z. 72, DE vom Dreieck).

§. 372. Die Höhe einer Figur ist die längste senkrechte Linie, welche auf der angenommemenen Grundlinie oder deren Verlängerung bis zu einer andern Seite oder einer Ecke der Figur errichtet werden kann (Z. 20, DC, Z. 71, DC, Z. 72, KF, oft auch eine Seite der Figur selbst, Z. 16, AB, Z. 23, DA).

§. 273. Größen, die so von gleicher Art sind, daß man sie mit gleichem Maaße messen kann, nennt man kommensurable Größen. Z. B. alle gerade Linien sind kommensurabel, und alle Flächenräume, aber nicht Linien und Flächen zusammen.

§. 374. Daß eine Größe in einer andern gewisse Mal (Z. 58, AB 1½ Mal in CD) oder ein gleiches Maaß in beiden enthalten ist, nennt man ihr geometrisches Verhältniß gegen einander. (Alle kommensurable Größen stehen also in einem geometrischen Verhältniß mit einander).

§. 375. Wenn 2 Größen (Z. 58, EF und GH) in demselben geometrischen Verhältnisse gegen einander stehen, wie 2 andre auch mit ihnen kommensurabe (AB uud CD), so heißen diese 4 Größen untereinander proportional. Da aber auch noch das Verhältniß anderer Größen dem der vorigen gleich seyn kann; so kann zwischen mehrern Paaren kommensurabler Größen eine Proportionalität stattfinden. (75 no. 2, 85 no. 1 und 2).

§. 376. Verschiedene Figuren, die eine gleiche Gestalt haben, (Z. 19, no. 1 und 2), wobei aber ihre Größe nicht gleich zu sein braucht (Z. 84, n. 1 und 2), nennt man

ähn-

ähnliche Figuren. Alle Kreise sind einander ähnlich, und die Aehnlichkeit geradlinichter Figuren besteht in der Proportionalität aller ihrer Seiten in einer bestimmten Folge und in der Gleichheit aller ihrer Winkel nach derselben Folge.

§. 377. Wenn verschiedene ausgedehnte Größen einander völlig gleich sind, z. B. gerade Linien gleich lang, Dreiecke von gleicher Größe und Gestalt, Kreise mit gleichen Radien, Bögen von gleicher Länge, so kann man sich jede derselben so auf die andere gelegt denken, daß ihre Gränzen genau zusammenfallen, und keine im geringsten vor der andern hervorragt, daher sagt man: völlig gleiche Größen decken einander, und umgekehrt, Größen, von denen man weiß, daß sie einander decken können, sind einander völlig gleich, Figuren, die einander decken, sind einander gleich und ähnlich ($\cong$).

§. 378. Der praktische Feldmesser muß öfters von dem Raum eines Feldes oder einer ganzen Gegend eine ähnliche Figur auf dem Papiere entwerfen, das heißt: ein Feld aufnehmen oder in Grund legen. (85 und 86).

§. 379. Durch 3 angegebene Punkte wird die Lage einer geometrischen Ebne genau bestimmt, d. h. die Ebne, welche man im Sinne hat, (z. B. T. III. Zeichn. 12, BehgdpB) kann zwar in verschiedenen Richtungen über 3 in ihr angegebene Punkte (z. B. Beg oder deg oder gep) hinausreichen, aber es kann doch bei

der

der Angabe solcher 3 Punkte keine andre Ebne, worin nicht alle diese 3 Punkte vorkommen, (z. B. nicht doecnd) verstanden werden.

§. 380. Wenn 2 Ebnen von verschiedener Lage sich durchschneiden (mnp und cde) oder nur zusammenstoßen (ndo und npo), so nennt man die gerade Linie, welche sie gemeinschaftlich haben (no), ihren **Durchschnitt**.

§. 381. Wenn auf dem Durchschnitt (gp) zweier Ebnen (Agf und Bgh) in jeder derselben eine Linie senkrecht steht (cd und ed), so nennt man den Winkel (cde), welcher dadurch gebildet wird, den **Winkel der beiden Ebnen**.

§. 382. Zwei Ebnen, die eine solche Lage gegen einander haben, daß sie sich auf keiner Seite einander nähern, also auch nicht zusammenstoßen und sich durchschneiden können (nde und lgh), nennt man **parallele Ebnen**.

§. 383. Eine gerade Linie (T. III. Z. 13, hc), die auf einer Ebne (PaQ) so steht, daß sie mit jeder Linie in derselben, womit sie sich schneidet (ab, de, gf) einen rechten Winkel bildet, heißt **auf der Ebne** (und diese auf ihr) **senkrecht**.

§. 384. Eine Ecke oder ein **körperlicher Winkel** ist die Neigung von mehr als 2 Ebnen gegeneinander, deren jede sich mit 2 andern derselben schneidet, von welchen Durchschnitten immer ein Winkel gebildet wird, dessen Scheitel mit den Spitzen aller übrigen so gebildeten Winkel in einem Punkte zusammentrifft. Nach der Zahl der sie bildenden Ebnen,

folg-

folglich auch nach der Zahl jener Durchschnitte oder Kanten, wird die Ecke eine 3-, 4- oder überhaupt viel-kantige oder seitige Ecke genannt. Die Größe der Ecke hängt von der Vielheit ihrer Ebnen und deren Neigung gegen einander, nicht von der Länge derselben ab.

§. 385. Ein Körper, welcher von lauter Ebnen eingeschlossen ist, (z. B. Würfel) heißt ein eckiger Körper; ein solcher, der von einer krummen Fläche ganz eingeschlossen ist, (Kugel, Ei), wird ein runder, einer, der von beiderlei, (Halbkugel) oder von ebnen und gekrümmten Flächen begränzt ist, (Kegel, Cylinder), ein gemischter Körper genannt. Die Ebnen, welche den ersten einschließen, werden dessen Seitenflächen genannt, eine beliebige derselben als Grundfläche angenommen, und eine auf dieser oder deren Verlängerung senkrechte, bis an die gegenüberstehende Seitenfläche oder Ecke reichende Linie die Höhe des Körpers genannt. Die Schnitte der aneinander gränzenden Seitenflächen heißen Seitenlinien oder Kanten.

§. 386. Körper, die gleichviele nach einer Reihe gegenseitig ähnliche Seitenflächen und gleiche Ecken haben, heißen ähnliche Körper.

§. 387. Ein Körper, dessen Seitenflächen alle regulär, einander gleich und ähnlich und dessen Ecken einander gleich sind, heißt ein regelmäßiger, jeder andre ein irregulärer Körper. Ein Hexaëder (Würfel) hat 6 gleiche Quadrate, ein Tetraëder 4 gleichseitige Triangel

angel, ein Oktaëder 8, ein Ikosaëder 20 dergleichen, ein Dodekaëder 12 Fünfecke zu Seitenflächen.

§. 388. Wenn man einen Körper in irgend einem Punkte der Höhe durch eine mit ihr senkrechte Ebne ganz durchschneidet, so heißt die dadurch von den Schnitten der Seitenflächen gebildete ebne Figur ein Durchschnitt des Körpers, der dessen Breite und Dicke in diesem Punkte der Höhe bestimmt.

§. 389. Ein Körper, der von 2 parallelen ebnen Figuren, welche beide Grundflächen genannt werden, und so vielen Parallelogrammen, wieviel jede derselben Seiten hat, eingeschlossen ist, heißt ein Pfeiler oder Prisma. Wenn die Seiten-Parallelogramme auf den Grundflächen senkrecht stehen, also ihre Schnitte seine Höhe sind, so ist es ein gerader, anders ein schiefer Pfeiler. Wenn die Grundflächen auch Rechtecke sind, so heißt der Pfeiler ein Parallelepipedum, auch ein Balken, und wenn alle Seiten- und Grundflächen gleiche Quadrate sind, ein Würfel oder Cubus, wenn sie aber Rauten sind, ein verschobener Würfel.

§. 390. Ein Körper (Pfeiler), der durch 2 gleiche Kreise (reguläre Figuren von unendlich vielen Seiten) als Grundflächen und durch eine gekrümmte, der Mantel genannt, als einzige Seitenfläche (oder unendlich viele), eingeschlossen ist, heißt ein Cylinder, eine Säule, Walze. Die gerade Linie zwischen

schen beiden Mittelpunkten der Grundflächen heißt die Achse; wenn diese auf den Grundflächen senkrecht steht, heißt der Körper ein gerader, anders ein schiefer Cylinder

§. 391. Ein Körper, der von einer ebnen Figur als Grundfläche und so vielen Dreiecken, wieviel Seiten dieselbe hat, eingeschlossen ist, heißt eine Pyramide, ein Spitzpfeiler. Der Punkt, wo alle Seiten-Dreiecke zusammenstoßen, heißt die Spitze, der Gipfel der Pyramide. Sie heißt gleichseitig, wenn ihre Seitenlinien gleich, gerade oder recht, wenn auch die Seiten ihrer Grundfläche gleich sind, aber rechtwinklig, wenn ihre Höhe auch die Höhe einer ihrer Seitenflächen ist.

§ 392. Ein Körper (Spitzpfeiler), der von einer Kreis-Fläche als einzige Grundfläche und einer gekrümmten Fläche eingeschlossen ist, heißt ein Kegel, eine Spitzsäule. Eine Linie vom Gipfel des Kegels bis zum Mittelpunkte der Grundfläche, heißt seine Achse. Er heißt gerade, wenn seine Achse auch seine Höhe ist, anders schief, aber rechtwinklig, wenn seine Höhe in die gekrümmte (Seiten-) Fläche fällt.

§. 393. Der Theil jedes Spitzpfeilers (auch eines Kegels) welcher zwischen der Grundfläche und einem mit ihr parallelen Durchschnitt enthalten ist, heißt ein abgekürzter, abgestumpfter Spitzpfeiler.

§. 394. Ein Körper, der von einer krummen

men Fläche so eingeschlossen ist, daß diese von einem Punkte in demselben allenthalben gleich weit entfernt ist, heißt eine Kugel (Sphäre). Jener Punkt heißt ihr Mittelpunkt, dessen Entfernung von der Kugelfläche der Halbmesser, und 2 derselben, welche zusammen eine gerade Linie ausmachen, der Durchmesser, auch die Achse und Höhe der Kugel, auch die Achse aller auf sie senkrechten, folglich mit einander parallelen Durchschnitte. Die Endpunkte jeder Achse heißen Pole.

§. 394. Alle Flächen, welche einen Körper einschließen, auf eine Ebne aneinander gelegt, werden zusammen das Netz ihres Körpers genannt. (Taf. II. Z. 91 ist das Netz eines Würfels, 92 eines länglichen Parallelepipedums, 93 eines dreieckigen Prisma, 94 eines Cylinders, 95 einer dreieckigen Pyramide, 96 eines Kegels, 97 eines Tetraëders, 98 eines Oktaëders, 99 eines Dodekaëders, 100 eines Ikosaëders, 101 des sogenannten Archimedischen Körpers, der von 18 gleichen Quadraten und 8 gleichen regulären Dreiecken eingeschlossen ist, 102 einer Kugel, deren noch so kleine Stücke aber nie genau in eine Ebne gelegt werden können.

§. 395. Jeder Würfel wird der Cubus jeder seiner Seiten-Linien genannt, (Z. 91, von AC, AI, IE u. s. w.) und man versteht daher unter dem Würfel jeder Linie den Cubus, dessen Seitenlinie dieselbe ist (AC^3), oder sein

könnte,

könnte, wenn er auch nicht vorhanden ist. (EF3, AB3).

§. 396. Wenn man eine Größe durch Zahlen angeben will, so nimmt man irgend eine Größe gleicher Art, gewöhnlich einen Theil derselben, als Maaß an, und wenn man gleichartige Größen vergleichen will, so geschieht dies nach einem gemeinschaftlichen Maaße. Gerade Linien oder Entfernungen mißt man mit einer bequemen geraden Linie, (einen Zoll, Fuß, eine Elle, Ruthe), um aber krumme auch darnach zu messen, muß man annehmen, daß sie sich in gerade verwandeln lassen. Zur Messung der Flächenräume wählt man ein Quadrat (Quadrat-Zoll, Fuß, Meile) zur Messung der körperlichen Räume einen Würfel (Cubik-Fuß, Ruthe), um aber auch die Größe irregulärer Räume, worin diese regulären Maaße nicht passen, darnach anzugeben, muß man annehmen, daß dieselben regelmäßigen Räumen gleich sind, (wenn z. B. irgendwo Stücke über eine gerade Linie hinausreichen, daß dieselben auf einer andern Seite wieder fehlen) Die Bestimmung der Flächenräume nach Quadraten nennt man die Quadratur der Körper, nach Würfeln des Cubiren derselben.

§. 397. Um verschiedene große Längen im Kleinen nach gleichem Maaße aufs Papier zu tragen, bedient man sich eines verjüngten Maaßstabes von beliebiger Länge und Eintheilung, dessen Theilen man auch nach jedesmaligem Bedürfniß einen höhern oder niedrigern Raum giebt. (T. I. Z. 14, AB = 1 Ruthe, B 1 = 1 Fuß, oder AB = 1 Fuß, B 1 = 1 Zoll).

§. 398. Zum Maaße der Winkel nimmt man einen ganzen oder halben Kreisumfang (gewöhnlich von Messing verfertigt), welcher in seine Grade eingetheilt ist. Dessen Mittelpunkt legt man an den Scheitel des Winkels und einen Radius an einen Schenkel; die Grade, welche dann zwischen diesem und dem andern Schenkel enthalten sind, nennt man das Maaß des Winkels, dem man ebensoviel Grade zuschreibt. Durch dieses Maaß trägt man die Größe eines Winkels von einem Orte zum andern über, daher heißt es ein Transporteur, ein größeres aber, dessen man sich zu praktischen Messungen bedient, ein Astrolabium. Auch durch einen in die Scheitel des Winkels gestellten Meßtisch, auf dem an einem gemeinschaftlichen (Mittel-)Punkte verschiegene bewegliche Lineale hangen, welche man nach den Schenkeln des Winkels richtet, läßt sich die Größe desselben aufs Papier tragen (Z. 69, 70).

§. 399. Um Linien im Großen (auf dem Felde) zu bezeichnen und zu messen, hat man verschiedene mechanische Hülfsmittel, z. B. Ketten, Schnüre, auch Stangen, die man bloß in etliche Punkte der Linie einsteckt, welches man die Absteckung der Linien (und der ganzen Felder) nennt. (Z. 66, 67, 68.)

Eine

Eine krumme Linie mißt man als mehrere gerade, oder man mißt ihre Abstände von einer geraden (Z. 88). Das ganze Verfahren und mehrere andere Hülfsmittel werden nur durch den Augenschein deutlich erkannt.

Zweiter Abschnitt.

Sätze.

§. 400. Zwischen 2 Punkten ist nur eine gerade Linie möglich.

§. 401. Unter allen Linien, die zwischen 2 Punkten möglich sind, ist die gerade Linie die kürzeste, und bestimmt daher ihre Entfernung von einander.

§. 402. Alle Radien desselben Kreises (Z. 46, CA und CB) oder gleich große Kreise (Z. 45, OF und Z. 46, CA) sind einander gleich.

§. 403. Wenn verschiedene Punkte (Z. 1, A, B, E) in einer Ebne von einem andern Punkte (C) gleich weit entfernt sind, so kann aus diesem, als einem Mittelpunkte, ein Kreis beschrieben werden, welcher durch alle jene Punkte hindurchgeht.

§. 404. Wenn man sich eine Peripherie um ihren feststehenden Mittelpunkt bewegt denkt, so kommt zwar jeder Theil derselben bei der Umdrehung in die Stelle eines andern, aber die Lage des ganzen Umfangs bleibt unverändert.

§. 405. Wenn 2 Kreise einander durchschneiden (Z. 3), so geschieht dies in 2 Punkten (R und S), und beide sind von beiden Mittelpunkten gleichweit entfernt.

§. 406. Zwei Kreise berühren einander nur in einem Punkte. (Z. 4, R.)

§. 407. Auch alle Durchmesser desselben Kreises (Z. 46, AE und BD) und gleicher Kreise (Z. 45, AD und 46, AE) sind einander gleich.

§. 408. Alle rechte Winkel (Z. 6, ABC und 16, BAC) sind einander gleich.

§. 409. Nebenwinkel über einer geraden Linie sind jederzeit zusammen so groß, wie 2 rechte Winkel. (Z. 7, p + q = 2 R, Z. 9, ACD + DCE + ECB = 2 R).

§. 410. Von 2 Winkeln, die zusammen Nebenwinkel sind (Z. 7, p und q) ist der eine gerade um soviel größer als ein rechter, wie der andre kleiner als ein rechter ist.

§. 411. Alle Winkel, die um einen Punkt herum liegen, sind zusammen so groß wie 4 rechte (Z. 46, m + ACD + r + ECB = 4 R).

§. 412. Jedes Paar Vertikal-Winkel besteht aus 2 gleichen Winkeln (Z. 10, o = x).

§. 413. Durch einen Punkt (Z. 11, O), der außerhalb einer geraden Linie (AB) liegt, kann nur eine Linie mit dieser parallel gezogen werden.

§. 414.

§. 414. Wenn 2 gerade Linien (Z. 12, no. 1, AB und CD) von einer dritten (EF) durchschnitten (oder nur getroffen) werden, und man ist überzeugt, daß ein Paar Wechselswinkel aus gleichen Winkeln bestehen, so kann man ebenso gewiß sein, daß die beiden ersten Linien gleichlaufend sind (AB $\#$ CD).

§. 415. Wenn 2 Linien von einer dritten durchschnitten werden, und man weiß gewiß, daß ein Paar gleichliegende Winkel aus gleichen Winkeln besteht ($o = r$), so kann man eben so fest überzeugt sein, daß die beiden durchschnittenen Linien mit einander parallel laufen.

§. 416. Wenn 2 Linien von einer dritten durchschnitten werden, und es ist dabei unbezweifelt, daß ein Paar innerer (oder auch ein Paar äußerer) Winkel, die auf gleicher Seite der Durchschnittslinie liegen, so groß ist wie 2 rechte, ($n + r = 2\ R$), so folgt auch daraus, daß die beiden ersten Linien ein Paar Parallellinien sind.

§. 417. Wenn man 2 Linien hat, von denen auf irgend eine Weise bekannt ist, daß sie mit einander gewiß parallel laufen (Z. 13, AB $\#$ CD), und diese werden von einer dritten Linie durchschnitten oder getroffen, so kann man überzeugt sein

1) daß jedes Paar Wechselswinkel aus

2 gleichen Winkeln besteht ($x = r$, $n = m$, $PEA = DFQ$, $PEB = CFQ$).

2) Daß jedes Paar gleichliegender Winkel aus gleichen Winkeln besteht ($PEB = r$, $PEA = m$, $n = DFQ$, $x = CFQ$).

3) Daß jedes Paar innerer Winkel, das auf gleicher Seite der Durchschnittslinien liegt, so groß ist wie 2 rechte, ($AEF + m = 2 R$ $BEF + r = 2 R$).

4) Daß auch jedes Paar äußerer Winkel, das auf gleicher Seite der Durchschnittslinien liegt, so groß ist wie 2 rechte ($PEB + DFQ = 2 R$, $PEA + CFQ = 2 R$).

§. 418. Zur Bildung einer geradlinigen Figur werden wenigstens drei Linien erfordert.

§. 419. Die 3 Winkel in jedem Dreieck sind zusammen so groß wie 2 rechte (Z. 17, $r + A + B = 2 R$).

§. 420. In jedem Dreiecke kann nur ein rechter oder ein stumpfer Winkel befindlich sein, zwei Winkel in jedem Dreiecke sind gewiß spitze.

§. 421. In jedem rechtwinkligen Dreieck sind die beiden spitzen Winkel zusammen auch so groß wie ein rechter (Z. 16, $B + C = 1 R$).

§. 422. In jedem stumpfwinkligen Triangel sind die beiden spitzen Winkel zusammen noch kleiner als ein rechter (Z. 18, $A + B < 1 R$).

§. 423. Wenn man 2 Dreiecke hat (von Z. 19, no. 1 und 2), von denen man weiß, daß 2 Winkel des einen zweien Winkeln

des

des andern Triangels gleich sind ($a = A$, $c = C$), so ist gewiß auch der dritte Winkel des einen Dreiecks dem dritten Winkel des andern gleich ($b = B$).

§. 424. Wenn man gewiß weiß, daß eine Linie (Z. 30, CD) auf einer andern (AB) senkrecht steht, so kann man überzeugt sein, daß aus keinem Punkte der ersten Linie (z. B. aus C) noch irgend eine andre senkrecht auf die zweite Linie gezogen werden kann (CE kann also nicht senkrecht sein).

§. 425. Auf jedem Punkte einer geraden Linie (Z. 15, AB) kann nur eine andre Linie mit der ersten senkrecht stehen (auf C nur EC, auf D nur FD).

§. 426. Jeder äußere Winkel eines Dreiecks ist größer als jeder innere, der nicht neben ihm liegt ($r > A$, und $r > B$).

§. 427. Jeder äußere Winkel bei einem Dreieck ist so groß wie die beiden innern, welche nicht neben ihm liegen (Z. 18, $r = A + B$).

§. 428. Wenn man 2 Dreiecke hat, von denen man schon versichert ist, daß 2 Seiten des einen Dreiecks und der dazwischen liegende Winkel zweien Seiten und dem von ihnen gebildeten Winkel des andern Triangels einzeln genommen gleich sind (Z. 19, no. 1 und 2, $ac = AC$, $bc = BC$, Winkel $c = C$), so kann man auch behaupten, daß beide Dreiecke einander völlig, also auch in allen ihren übri-

übrigen einzelnen Theilen gleich sind (ab = AB, Winkel a = A, b = B).

§. 429. Wenn man von 2 Dreiecken weiß, daß eine Seite und die beiden daran liegenden Winkel des einen Dreiecks einer Seite und den an ihr liegenden Winkeln des andern einzeln gleich sind, (ab = AB, a = A, b = B), so kann man auch überzeugt sein, daß die beiden Triangel gleich und ähnlich sind (abca ≌ ABCA, c = C, ac = AC, bc = BC).

§. 430. Wenn alle 3 Seiten eines Dreiecks einzeln den 3 Seiten eines andern Triangels gleich sind, (ab = AB, ac = AC, bc = Bc), so folgt daraus die Gewißheit, daß beide Dreiecke gleich und einander ähnlich abca ≌ ABCA), und auch die einzelnen Winkel des einen denen des andern Triangels gleich sind (a = A, b = B, c = C).

§. 431. Wenn in einem gleichschenklichten (auch gleichseitigen) Dreiecke aus dem Winkel, welcher die gleichen Seiten bilden, eine Linie senkrecht auf die dritte Seite gezogen ist, so sind die dadurch entstandenen 2 Dreiecke Hälften des Ganzen und auch einander ähnlich (Z. 20, CDAC ≌ CDBC).

§. 432. In jedem gleichschenklichten Dreieck stehen den gleichen Seiten auch gleiche Winkel gegenüber (A = B).

§. 433. Wenn ein Triangel 2 gleiche Winkel hat (A = B), so kann man fest überzeugt sein, daß die ihnen gegenüberstehenden Seiten gleich sind (BC = AC).

§. 434. Jedes gleichseitige Dreieck (Z. 26, 26, ABCA) hat auch lauter gleiche Winkel A = B = C).

§. 435. Wenn man weiß, daß alle Winkel eines Dreiecks gleich sind (A = B = C), so kann man auch behaupten, daß es ein gleichseitiger Triangel ist.

§. 436. In jedem Dreiecke liegt eine Seite, von der man weiß, daß sie größer ist als eine andere (Z. 21, CA > CB), auch ein größerer Winkel gegenüber als der andere (Winkel CBA > CAB).

§. 437. Wenn man weiß, daß ein Winkel eines Dreiecks größer ist als ein anderer (Z. 28, C > B), so kann man versichert sein, daß jenem auch eine größere Seite als diesem gegenüber liege (AB > AC).

438. In jedem Parallelogramm sind die Seiten und Winkel, welche einander gegenüber liegen, einander gleich (Z. 22, DC = AB, DA = CB, C = A, ADC = ABC).

§. 439. Wenn 2 aneinander gränzende Seiten eines Parallelogramms gleich sind (Z. 23, AB = AD), so folgt daraus, daß alle 4 Seiten der Figur gleich sein müssen (AB = BC = CD = DA).

§. 440. Wenn ein Winkel eines Parallelogramms ein rechter ist, so ist jeder Winkel der Figur ein rechter.

§. 441. Wenn man von einem Vierecke noch weiter nichts weiß, als daß jedes Paar einander gegenüberstehender Seiten aus gleichen Linien besteht (Z. 22, DC = AB, DA = CB), so so kann man auch überzeugt sein, daß die Seiten parallel sind (DC ‡‡ AB, DA ‡‡ CB), und daher das Viereck ein Parallelogramm ist.

§. 442. Wenn man von einem Viereck weiß, daß beide Paare einander gegenüberstehender Winkel desselben aus gleichen Winkeln ($A = C$, $B = D$) besteht, so folgt auch daraus, daß die Figur ein Parallelogramm ist.

§. 443. Wenn man von einem Vierecke nun erfahren hat, daß zwei einander gegenüberstehende Seiten parallel aber auch gleich sind (DC ‡‡ AB, $DC = AB$), so kann man gewiß sein, daß auch die andern beiden Linien gleichlaufend sind, also die Figur ein Parallelogramm ist.

§. 444. Alle Winkel jeder geradlinigen Figur betragen zusammen sovielmal 2 rechte, wie die um 2 verminderte Zahl ihrer Seiten anzeigt (Z. 24, $A + B + C + D + E = 5 - 2 \times 2 R = 6 R$).

§. 445. Jeder Durchmesser theilt seinen Kreis in 2 gleiche Theile (Z. 45, $ACBD = AFD$).

§. 446. Jede Sehne, von welcher man weiß, daß durch sie die Peripherie in 2 gleiche Theile getheilt wird, geht gewiß durch den Mittelpunkt, ist also ein Durchmesser.

§. 447. Wenn man von 2 Ausschnitten desselben Kreises (Z. 46, ACBA und DCED) weiß, daß ihre Winkel gleich sind ($m = r$), so folgt daraus, daß auch ihre Bögen gleich sein müssen ($AB = DE$).

§. 448. Wenn bekannt ist, daß die Bögen zweier Ausschnitte gleich sind, so ist daraus zu folgern, daß auch ihre Winkel gleich sind.

§. 449. Wenn 2 Sehnen eines Kreises (oder gleicher Kreise) einander gleich sind (Z. 46, AB = DE), so kann man auch wissen, daß jeder Bogen, der von der einen bespannt wird, auch einem Bogen der andere gleich ist (Bogen AB = DE, und ADEB = DABE).

§. 450. Wenn man von der Gleichheit zweier Bögen versichert ist, so kann man auch den Schluß machen, daß die Sehnen, von welchen sie bespannt werden, einander gleich sind.

§. 451. Jeder Winkel am Mittelpunkte ist der ebensovielste Theil von 4 rechten Winkeln wie der Bogen, worauf er steht, von der ganzen Peripherie ist.

§. 452. Jeder Winkel am Mittelpunkte ist doppelt so groß wie ein Peripheriewinkel, der mit ihm auf demselben (oder gleichen) Bogen steht (Z. 47 no. 1, 2 und 3, ACB = 2 ADB).

§. 453. Jeder Winkel am Umfange ist der ebensovielste Theil von 2 rechten, wie sein Bogen von der Peripherie.

§. 455. Alle Peripheriewinkel, die auf demselben Bogen (oder gleichen Bogen) stehen, sind einander gleich (Z. 48 no. 1, A = B = C).

§. 455. Jeder Peripheriewinkel, der auf

auf einem Bogen steht, welcher die Hälfte seines Umfangs ausmacht, oder welcher in einem Halbkreise liegt, ist ein rechter Winkel (Z. 48 no. 2, ADB = 1 R).

§. 456. Jeder Umfangswinkel, der auf einem größern Bogen, als der Halbkreis ist, steht, oder in einem Abschnitte liegt, welcher kleiner als die Hälfte der Kreisfläche ist, muß größer sein als ein rechter (EDB > 1 R).

§. 457. Jeder Winkel, der auf einem kleinern Bogen, als der Halbkreis ist, steht, der also in einem Abschnitte liegt, der die halbe Kreisfläche übertrifft, ist bestimmt ein spitzer Winkel (FDB < 1 R)

§. 458. Eine Sehne (DE), von welcher man weiß, daß sie die Mitte (F) einer andern (AB) senkrecht durchschneidet, ist ein Durchmesser, und theilt auch jeden Bogen der zweiten Sehne in 2 gleiche Theile (Bogen DA = DB, AE = EB, DAE = DBE).

§. 459. Jede Linie im Kreise (T. III. Z. 1, DE), von welcher man weiß, daß sie den Mittelpunkt in sich enthält, theilt eine Sehne, welche sie senkrecht trifft (DFA = 1 R), in 2 gleiche Theile (FA = FB)

§. 460. Jede geradlinichte Figur, welche in einem Kreise von lauter gleichen Sehnen gebildet wird (Z. 50, AB = BC = CD = DE = EF = FA), hat auch lauter gleiche Winkel (A = B = C = D = E = F), ist also eine reguläre Figur.

§. 461. Wenn man in irgend einer regu-

lären

lären Figur (T. III. Z. 2) 2 aneinander gränzende Winkel halbirt, und die Theilungslinien verlängert, bis sie einander durchschneiden, so ist dieser Durchschnittspunkt von allen Ecken der Figur gleichweit entfernt (OA = OB = OC = OD = OE = OF).

§. 462. Um jede reguläre Figur läßt sich ein Kreis beschreiben.

§. 463. Die Seite jedes regulären Sechsecks ist gleich dem Radius desjenigen Kreises, der um dasselbe beschrieben werden kann (AB = AO).

§. 464. Wenn man gleichhohe Figuren mit ihren Grundlinien in eine gerade Linie stellt, so reichen ihre Höhen bis in eine Linie, welche mit den Grundlinien und der Linie, worauf sie stehen, parallel ist (Z. 72, CF $\#$ AB $\#$ DE $\#$ AE).

§. 465. Wenn die Grundlinien verschiedener Figuren auf einer Linie stehen, und ihre Höhen reichen bis in eine mit derselben gleichlaufende Linie, so kann man behaupten, daß ihre Höhen einander gleich sind (CI = FK).

§. 466. Alle Parallelogramme, von denen man überzeugt ist, daß sowohl ihre Grundlinien wie ihre Höhen gleich sind, haben auch gleichen Flächeninhalt (Z. 97, AEFDA = DEFCD, Z. 73, n. 1 und 2, ADCBA = AFEBA).

§. 467. Jedes Dreieck ist die Hälfte eines Parallelogramms, mit dem es gleiche Grund-

Grundlinie und Höhe hat (Z. 71, ACBA = ½ AE).

§. 468. Alle Triangel, deren Grundlinien und Höhen gleich sind, haben gleichen Flächeninhalt (Z. 76, AOBA = BOFD = FOGF = GOHG = HOIA).

§. 469. Ein Dreieck ist an Flächeninhalt einem Parallelogramm gleich, dessen Höhe der seinigen gleich und dessen Grundlinie halb so lang ist wie die seinige (Z. 82, ACBA = FD) oder dessen Grundlinie ebenso und dessen Höhe halb so lang ist wie die seinige.

§. 470. Ein Dreieck, dessen Grundlinie so groß ist, wie die Grundlinien mehrerer ebensohoher Dreiecke zusammen genommen, ist am Flächeninhalt allen diesen zusammen gleich (Z. 76, AIOA = ABOA + BCOB + CDOC + DECD + EACE).

§. 471. Ein Parallelogramm, dessen Grundlinie den Grundlinien mehrerer gleich hoher Parallelogrammen zusammen gleich ist, begreift auch den Flächeninhalt aller derselben in sich (T. III. Z. 5, DB = LB + HF).

§. 472. Ein Dreieck, dessen Höhe den Höhen mehrerer Dreiecke gleich ist, die mit ihm gleiche Grundlinien haben, ist diesen zusammen an Inhalt gleich (T. III. Z. 7, no. 3, LPOL = LNOL + ONMO).

§. 473. Ein Parallelogramm ist mehrern zusammen am Inhalte gleich, die mit ihm gleiche Grundlinien haben, und deren Höhen zu-

zusammen der seinigen gleich sind. (Z. 9, AI = AF + DH).

§. 474. Wenn man weiß, daß die **Grundlinie** eines Parallelogramms **gewissemal** so groß ist wie die eines andern, **gleich hohen** Parallelogramms (Z. 5, AB = 1½ EF), so kann man überzeugt sein, daß auch der **Flächenraum** des ersten **ebensovielmal** so groß ist wie der des andern (DB = 1½ HF).

§. 475. Wenn die Grundlinie eines **Dreiecks** gewissemal so groß ist wie die Grundlinie eines andern Dreiecks (Z. 76, AI = 5 AB), so folgt daraus, daß auch der Raum des ersten den Raum des andern ebensovielmal in sich hält (AIOA = 5 ABOA).

§. 476. Ein Parallelogramm (Z. 91, AD), von dem bekannt ist, daß es mit einem andern (KH), **gleiche Grundlinie** hat (BD = MH), und daß seine **Höhe gewissemal** so groß ist wie die Höhe des andern (DC = 4 MK), begreift auch bestimmt den **Flächenraum** des letzten **ebensovielmal** in sich (AD = 4 KH).

§. 477. Ein **Dreieck**, welches mit einem andern gleiche Grundlinie, aber eine gewissemal so große Höhe wie dieses (T. III. Z. 7 no 3, LO = OM, LP = 2 LN) hat, faßt auch den Raum des letztern ebensovielmal in sich (LOPL = 2 OMNO).

§. 478. Bei jedem rechtwinklichten Dreieck (Z. 75 no. 1 und 2) ist das **Quadrat der Hypothenuse** am Flächeninhalt gleich den **beiden Quadraten der Katheten** zusammen

men genommen. (AF = AK + CH, $ab^2 = ac^2 + bc^2$.)

§. 479. Bei jedem stumpfwinkligen Dreieck ist das Quadrat der größten Seite gleich den beiden andern Quadraten nechst zweien (auch einander gleichen) Rechtecken, deren jedes eine Grundlinie hat, die einer der kleinen Seiten gleich ist, und eine Höhe gleich der Verlängerung dieser Seite bis dahin, wo sie von einer senkrechten Linie aus dem andern spitzen Winkel getroffen wird. (T. III. Z. 10, BE = BH + CK + AM + AI = BH + CK + 2 AM = BH + CK + 2 AI.)

§. 480. Bei jedem spitzwinkligen Triangel ist das Quadrat jeder Seite gleich den beiden andern Quadraten, von deren Inhalte zwei Rechtecke abgezogen werden, deren jedes eine Grundlinie hat, die einer der andern Seiten gleich ist, und eine Höhe gleich dem Theile dieser Seite, von dem der ersten Seite gegenüberstehenden Winkel bis an einen Perpendikel aus dem ihr gegenüberstehenden Winkel. (T. III. Z. 11, BE = BH — NH + CK — OK = BH + CK — 2 NH = BH + CK — 2 OK.)

§. 481. Jede reguläre Figur ist einem Dreiecke gleich, dessen Grundlinie allen ihren Seiten gleich, und dessen Höhe so groß ist wie die Höhe eines der gleichen Dreiecke, in welche sie aus dem Mittelpunkt eines umschriebenen Kreises getheilt werden kann. (Z. 76, ABCDEA = AIOA.)

§. 482. Jeder Ausschnitt eines Kreises ist gleich einem Dreiecke, dessen Grundlinie der Länge des Bogens, und dessen Höhe dem Radius gleich ist. (Z. 77.)

§. 483. Jede Kreisfläche ist gleich einem Dreieck, dessen Grundlinie der Länge des ganzen Umfangs, und dessen Höhe dem Radius gleich ist (Z. 77).

§. 484. Das geometrische Verhältniß zweier ausgedehnter Größen ist gleich dem Verhältniß der Zahlen, welche anzeigen, wievielmal ein gewisses Maaß (auch eine Größe derselben Art) in jeder von beiden enthalten ist. (T. I. Z. 58, BA : BC = 4 : 6, FE : HG = 8 : 12; Z. 91, EH : AD = 3 : 4) Alle Sätze von Verhältnissen und Proportionen der Zahlen gelten daher auch von Linien, Flächen und Körpern. (§§. 228 bis 252.)

§. 485. Zwei Figuren, deren jede einer dritten ähnlich ist, sind auch einander ähnlich. (Z. 66 n 1, ABCA ∽ EDCE, edCe ∽ EDCE, daher ABCA ∽ edCe.)

§. 486 Alle reguläre Figuren von gleichvielen Seiten sind einander ähnlich (Z. 75, AF ∽ AK ∽ BG.)

§. 487. Jede Linie, die im Dreieck mit einer Seite parallel ist, schneidet ein dem ganzen ähnliches Dreieck ab. Z. 59, DEAD ∽ BCAB.)

§. 488. Wenn man weiß, daß 2 Winkel eines Dreiecks zweien Winkeln eines andern einzeln gleich sind, so kann man überzeugt sein, daß die Dreiecke einander ähnlich sind. (Z. 60 n. 1, 2, a = A, b = B, abca ∽ ABCA.)

§. 489. Wenn 2 Seiten des einen Dreiecks zweien Seiten des andern proportional sind, und der dazwischen liegende Winkel in beiden gleich ist, so sind die Dreiecke einander ähnlich. (ac : AC = ab : AB = bc : BC, abca ∽ ABCA.)

§. 490. Wenn alle Seiten eines Dreiecks gewiß den Seiten des andern proportional sind, so folgt daraus die Aehnlichkeit der Dreiecke (ac : AC = ab : AB = bc : BC, abca ∽ ABCA).

§. 491. Ein rechtwinkliges Dreieck wird durch einen Perpendikel aus der Spitze des rechten Winkels in zwei unter sich und dem Ganzen ähnliche Dreiecke getheilt. (Z. 61, ABC = 1 R, x = r, ABDA ∽ BCDB ∽ ACBA.)

§. 492. Jeder Perpendikel aus dem rechten Winkel eines Dreiecks ist die mittlere stetige Proportional-Linie zwischen den Stücken, worin sie die Hypothenuse getheilt hat. (Z. 61, ∺ AD : BD : DC.)

§. 493. Wenn Figuren, durch Diagonale, in solche Dreiecke getheilt werden können, welche in gleicher Reihe paarweise einander ähnlich sind, so sind die ganzen Figuren einander ähnlich. (Z. 84 n. 1, 2, ABCA ∽ abca, ACDA ∽ acda u. s. w.; ABCDEFA ∽ abcdefa.)

§. 494. Wenn man weiß, daß Figuren einander ähnlich sind, so können sie durch Diagonale in ähnliche Dreiecke getheilt werden. Z. 84, ABCDEFA ∽ abcdefa; AFEA ∽ afea; AEDA ∽ aeda u. s. w.)

§. 495.

§. 495. Wenn sich 2 Sehnen eines Kreises durchschneiden, so geben die Stücke jeder zwischen den Stücken der andern eine Proportion. (Z. 49, AF : DF = FE : FB.)

§. 496. Wenn sich 2 verlängerte Sehnen außerhalb des Kreises durchschneiden, so verhalten sich die äußern Stücke umgekehrt wie ihre ganzen Linien. (T. III. Z. 3, AO : CO = DO : BO.)

§. 497. Halbmesser verschiedener Kreise stehen miteinander in demselben Verhältniß wie ihre ganzen Umfänge und gleichviel Grade derselben. (Z. 4, AC : ac = AB : ab.)

§. 498. Parallelogramme (also auch Dreiecke mit gleichen Grundlinien verhalten sich in Rücksicht ihres Flächen-Inhalts zu einander wie ihre Höhen, und gleichhohe wie ihre Grundlinien. (T. III. Z. 6, CA : KG = AB : FE; IBAI : EKFE = AB : FE; Z. 5, AC : EG = AB : EF; Z. 7 n. 3, NLON : NLMN = LO : LM.)

§. 499. Parallelogramme (also auch Dreiecke) verhalten sich überhaupt zu einander, wie die Produkte der Zahlen gleicher Theile ihrer Grundlinien mit den Zahlen gleicher Theile ihrer Höhen. (Z. 74, AC : AF = AB $\times$ AD : AE $\times$ EF = 24 : 32. T. III. Z. 7, n. 1, 2, ABDA : GFIG = AB $\times$ ED : GF $\times$ KI.)

§. 500. Alle Quadrate verhalten sich an Flächenräumen gegen einander, wie die Quadrate der Zahlen gleicher Theile ihrer Seiten. (Z. 75 n. 2, $ab^2 : ac^2 : bc^2 = 25 : 16 : 9$.)

§. 501. Wenn die Grundlinie und Höhe eines

nes Dreiecks (also auch Parallelogramms) zwischen der Grundlinie und Höhe eines andern eine Proportion ausmachen, so haben die Dreiecke (oder Parallelogramme) gleichen Flächeninhalt. (T. III Z 7, n. 1, 2, Wenn AB : GF = KI : ED, dann ABDA = GFIG, und AC = FH.)

§. 502. Jedes Rechteck ist einem Quadraten gleich, dessen Seite die mittlere stetige Proportionallinie zwischen seiner Grundlinie und Höhe ist. (Z. 83, $\div$ AD : DE : DC, AC = DE^2.)

§. 503. Wenn man weiß, daß Dreiecke (oder Parallelogramme) gleichen Flächenraum haben, so stehen gewiß ihre Grundlinien und Höhen in umgekehrter Proportion. (T. III. Z. 7, n. 1, 2; wenn ABDA = GFIG (und AC = FH), dann AB : GF = KI : ED.)

§. 504. Die Flächenräume ähnlicher Dreiecke stehen in demselben Verhältniß zu einander, wie die Quadrate ihrer gleichgelegenen Seiten. (T. III. Z. 9, ADEA : ABCA = AD^2 : AB^2.)

§. 505. Die Flächenräume der Quadrate proportionaler Linien stehen auch in Proportion. (AE : AC = AD : AB, AE^2 : AC^2 = AD^2 : AB^2.)

§. 506. Die Flächenräume aller ähnlichen Figuren verhalten sich zu einander wie ihre gleichgelegenen Seiten. (Z. 84, n. 1, 2; ABCDEFA : abcdefa = AB^2 : ab^2.)

§. 507. Alle Kreisflächen verhalten sich zu einander, wie die Quadrate ihrer Halbmesser und auch ihre Durchmesser. (T. I. Z. 3 u. 4.)

§. 508. Wenn die Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks gleichgelegener Seiten ähnlicher Figuren (oder auch Radien oder Durchmesser verschiedener Kreise) sind, so hat die zur Hypothenuse gehörige Figur ebensoviel Flächeninhalt, wie die beiden zu den Katheten gehörigen zusammen. (Z. 75, ein gleichseitiges Dreieck über AC oder ein Kreis oder Halbkreis mit diesem Radius oder Durchmesser wäre ebensogroß wie die ähnlichen Figuren über AB und BC zusammen.)

§. 509. Jeder Schnitt zweier Ebnen ist eine gerade Linie. (T. III. Z. 12, Schnitt von Ag und ne ist cn, von Ag und Bg ist pg, von Bg und fgh ist gh.)

§. 510. Wenn man weiß, daß 2 Ebnen parallel sind, und diese werden von einer dritten Ebne geschnitten, so sind gewiß auch die Schnitte parallel. (ne ‡‡ lh, oe ‡‡ mh.)

§. 511. Wenn 2 sich schneidende Ebnen auch von einer 3ten und 4ten so geschnitten werden, daß die Schnitte der beiden letzten in den beiden ersten mit einander parallel sind, so kann man auch überzeugt sein, daß die 3te und 4te Ebnen selbst gegen einander parallel liegen. cd ‡‡ fg, de ‡‡ gh, daher cde ‡‡ fgh.)

§. 512. Wenn zwei sich schneidende Ebnen auch von 2 parallelen Ebnen geschnitten werden, so bilden die Schnitte in ihnen gleiche Winkel. (Winkel cde = g.)

§. 513.

verändern zwar die Theile der Oberfläche ihre Stellen, aber in der Lage der ganzen Kugelfläche wird dadurch nichts geändert und man kann jedes Stück derselben jedem gleichgroßen verwechseln.

§. 532. Jeder ebne Durchschnitt der Kugel ist eine Kreisfläche.

§. 533. Jeder Durchschnitt, welcher durch den Mittelpunkt geht, ist der größte Kreis der Kugel, hat mit ihr gleiche Radien, und theilt dieselbe in Halbkugeln (Hemisphären).

§. 534. Jeder Durchschnitt wird desto kleiner, je weiter er vom Mittelpunkte entfernt ist.

§. 535. Zwei größte Kreise schneiden einander immer in Hälften.

§. 536. Durchschnitte, die einander halbiren, sind gewiß größte Kreise.

§. 537. Jede Kugel enthält zwei Drittheile des Inhalts eines Cylinders, dessen Grundfläche ihrem größten Kreise, und dessen Höhe ihrem Durchmesser gleich ist.

§. 538. Alle Kugeln verhalten sich zu einander wie die Würfel ihrer Durchmesser.

§. 539. Wenn die Grundfläche eines Spitzpfeilers (oder Kegels) den Grundflächen mehrerer gleichhoher zusammen gleich ist, so begreift er den Inhalt aller dieser in sich.

§. 540. Die Kugel ist gleich dem Kegel, dessen Grundfläche ihrer ganzen Oberfläche

fläche, und dessen Höhe ihrem Radius gleich ist.

§. 541. Die Oberfläche jeder Kugel ist viermal so groß wie ihr größter Kreis.

§. 542. Die Oberflächen verschiedener Kugeln verhalten sich wie die Quadrate ihrer Radien und Durchmesser.

Dritter Abschnitt.

Aufgaben.

§. 543. Einen Punkt zu finden, der von 2 gegebenen (Z. 25, A, B) gleich weit entfernt ist, aber außerhalb der zwischen ihnen möglichen geraden Linie (AB) liegt. — Man beschreibe aus beiden Punkten mit gleicher (beliebiger) Oeffnung des Zirkels, die aber über die Hälfte von AB hinausreichen muß, (über oder unter AB) Kreisbogen, und zwar so groß, daß sie sich durchschneiden, so ist ihr Durchschnittspunkt (P) der gesuchte Punkt.

§. 544. Von einer Linie (AS) ein Stück abzuschneiden, das einer andern Linie (LM) gleich ist. — Man eröffne den Zirkel soweit, wie die 2te Linie lang ist, setze die eine Spitze in den Anfangspunkt der 1sten Linie und durchschneide dieselbe mit einem kleinen Bogen.

§. 545. Aus 3 gegebenen Linien, deren jede 2 zusammen größer als die dritte sind (Z. 28, LM, NO, PQ), ein Dreieck über einer vierten Linie (AS) zu errichten, (wobei auch die Lage der Seiten bestimmt sein kann). — Man nehme die 1ste Linie (LM, die auf AL aus A liegen soll) in den Zirkel und schneide von der 4ten Linie ein so großes Stück (AB) ab. Dann nehme man die 2te (NO, die in A angebracht werden soll), und beschreibe damit aus dem Anfang des abgeschnittenen Stücks einen Kreisbogen, ebenso aus dem Ende des abgeschnittenen Stücks (B) mit der Eröffnung der dritten Linie (PQ) einen Bogen, der den vorigen durchschneidet, und ziehe dann von diesem Durchschnittspunkte (C) Linien nach dem Anfang und Ende des abgeschnittenen Stücks, so ist das verlangte Dreieck errichtet.

§. 546. Ueber einer gegebenen Linie (Z. 26, AB) ein gleichseitiges Dreieck zu beschreiben. — Man nehme die gegebene Linie in den Zirkel, und beschreibe aus ihrem Anfangs- und Endpunkte über ihr selbst Kreisbögen, die sich durchschneiden, ziehe dann aus dem Durchschnittspunkte Linien nach jenen beiden Punkten.

§. 547. Ein gleichschenkliches Dreieck zu zeichnen, wozu 2 Seiten (Z. 27, AB als Länge der gleichen Seiten und DE als ungleiche) gegeben sind. — Man nehme die erste Linie (AB) in den Zirkel, und beschreibe aus einem ihrer Endpunkte (A) einen Bogen; dann beschreibe

schreibe man aus ihrem andern Endpunkte (B) mit der Eröffnung der andern Linie (DE) einen Bogen, der den vorigen durchschneidet, und ziehe aus dem Durchschnittspunkte die Radien (CA, CB).

§. 548. Ueber einer Linie (Z. 29, BC) aus einem bestimmten Punkte (B) einen Winkel zu zeichnen, der einem gegebenen (A) gleich ist. — Man setze den Zirkel in den Scheitel (A) des gegebenen Winkels, und beschreibe zwischen seinen Schenkeln einen Kreisbogen (FG); mit derselben Eröffnung beschreibe man aus dem bestimmten Punkte (B) einen Bogen, der die gegebene Linie (BC) schneidet, und aus diesem Durchschnittspunkte beschreibe man mit der Länge der Sehne des ersten Bogens noch einen 3ten Bogen, der den 2ten durchschneidet, aus dessen Durchschnitt man eine Linie nach dem bestimmten Punkte zieht.

§. 549. Ein durch 2 Linien (Z. 30, AB, DE) und einem Winkel (R), der dazwischen kommen soll, bestimmtes Dreieck zu bilden. — Man setze an die eine Linie (AB) einen Winkel, gleich dem gegebenen, an, und mache den andern Schenkel (AC) gleich der 2ten Linie (DE); zuletzt verbinde man die Endpunkte der Schenkel.

§. 550. Ein Dreieck zu bilden, welches bestimmt ist, durch eine Linie (Z. 30, AB) und 2 Winkel (B und R), welche daran liegen sollen, die aber zusammen weniger als 2 rechte betragen. — Man trage an jedes Ende der

ge-

gegebenen Linie einen der Winkel an, und verlängere ihren neuen Schenkel, bis sie sich treffen.

§. 551. Die Mitte einer gegebenen Linie (Z. 31, AB) zu treffen. — Man suche über und unter der Linie einen Punkt, der von ihren beiden Enden gleichweit entfernt ist, und verbinde diese Punkte durch eine Linie (RQ), so durchschneidet diese die gegebene Linie in der Mitte.

§. 552. Auf der Mitte einer Linie eine senkrechte zu errichten. — Man verfahre wie vorher, so steht die Halbirungslinie (PQ) auch auf der gegebenen senkrecht.

§. 553. Auf einem Punkte (Z. 32, n. 1, R), der in einer Linie gegeben ist, eine senkrechte zu errichten. — Man schneide zu beiden Seiten des Punktes (R) von der Linie (DE) gleiche Stücke ab (RA = RB), suche einen Punkt (Q), der von beiden Enden der abgeschnittenen Stücke (A und B) gleichweit entfernt ist, und ziehe von diesem nach dem gegebenen Punkte eine Linie, so ist diese senkrecht.

§. 554. Aus einem Punkte (Z. 32, n. 2, R), der über eine Linie (DE) gegeben ist, eine senkrechte zu errichten. — Man setze den Zirkel in den gegebenen Punkt (R), und eröffne denselben beliebig, doch so, daß er die gegebene Linie (DE) in 2 Punkten (A, B) trifft, von diesen gleichweit entfernt suche man noch einen Punkt außerhalb der Linie (Q) und verbinde die-

diesen und den gegebenen durch eine Linie, so trifft diese (RQ) die gegebene Linie senkrecht.

§. 555. Am Ende einer Linie (Z. 33, AB) eine senkrechte zu errichten. — Man schneide von der gegebenen Linie aus dem Endpunkte (B) ein kleineres Stück (BC) ab, suche über demselben einen Punkt (P) von den Endpunkten (C und B) gleichweit entfernt, ziehe nach diesem von dem einen (C), der nicht der gegebene Endpunkt ist, eine Linie (CP) und mache sie noch einmal so lang (PQ = CP), so wird, wenn man aus dem letztgefundenen Punkte (Q) eine Linie nach dem Endpunkte (B) zieht, dieselbe senkrecht sein.

§. 556. Einen Winkel (Z. 34, PAQ) in 2 gleiche Theile zu theilen. — Man schneide aus dem Scheitel auf beiden Schenkeln gleiche Stücke ab (AB = AC), suche aus deren Endpunkten (B, C) einen Punkt (D), der von ihnen gleichweit entfernt ist, und ziehe von diesem nach dem Scheitel eine Linie, welche den Winkel halbirt.

§. 557. Durch einen Punkt (Z. 35, C) über eine Linie (AB) eine andere mit ihr parallel zu ziehen. — Man nehme in der gegebenen Linie (AB) willkührlich 2 Punkte (D, E) an, beschreibe dann aus dem gegebenen Punkte (C) einen Bogen mit der Entfernung der angenommenen Punkte (DE), und aus einem derselben (E) mit der Entfernung des andern vom gegebenen (DC) einen Bogen, der den vorigen schneidet, so wird die Linie durch diesen Durchschnittspunkt (P) und den gegebenen (C)

mit

mit der gegebenen Linie parallel sein (CP $\ddagger\ddagger$ AB).

§. 558. Ein Parallelogramm zu bilden, welches durch 2 Seiten (Z. 36, AB, DE) und einen Winkel (F), der dazwischen kommen soll, genau bestimmt ist. — Man setze an den Anfang (A) der einen Seite (AB) einen Winkel (A) gleich dem gegebenen (F), und mache den neuen Schenkel gleich der andern Seite (AC = DE). Aus dem Endpunkte jeder Linie beschreibe man dann einen Bogen mit der Eröffnung der andern Linie, und ziehe die Radien dieser Bögen (EG, CG).

§. 559. Irgend eine Figur zu zeichnen, die einer gegebenen (Z. 37, ABCDEA) gleich und ähnlich ist. — Man theile die gegebene Figur durch (wirkliche oder eingebildete) Diagonale in lauter Dreiecke, und setze ebensolche nach derselben Ordnung aneinander, so werden die äußern Seiten derselben eine gleiche Figur bilden.

§. 560. Jeden Kreisbogen (Z. 51, AB) zu halbiren — Man suche auf jeder Seite des Bogens einen Punkt, der von den Enden (A und B) gleichweit entfernt ist (P, Q), und verbinde diese durch eine Linie, so theilt dieselbe den Bogen in 2 gleiche Theile (AR = BR).

§. 561. Zu jedem Bogen (Z. 52, AB) den Mittelpunkt zu finden, aus welchem er beschrieben ist. — Man wähle in demselben 2 beliebige Stücke (AC und DB), halbire jeden derselben

selben, und verlängere die Theilungslinien, bis sie sich schneiden, so ist ihr Durchschnittspunkt (O) der gesuchte Mittelpunkt.

§. 562. Zu einem ganzen Umfange (Z. 53) den Mittelpunkt zu finden. — Man verfahre entweder wie vorher, oder man ziehe eine Sehne (AB), errichte auf deren Mitte eine senkrechte Linie (EF), verlängere diese auf beiden Seiten bis zum Umfange, und halbire diesen Durchmesser, so ist sein Theilungspunkt (C) das Centrum.

§. 563. Durch jede 3 Punkte, die nicht in gerader Linie liegen (Z. 54, A, B, C), einen Kreis zu beschreiben. — Man verbinde einen derselben (B) mit den beiden andern durch Linien, errichte auf der Mitte jeder eine senkrechte, verlängere diese, bis sie sich schneiden, und eröffne aus dem Durchschnittspunkte (O) den Zirkel zu einem der gegebenen Punkte (A), so wird ein Kreis von diesem Radius durch alle 3 Punkte hindurchgehen.

§. 564. Ein reguläres Sechseck einem gegebenen Kreise (Z. 50) einzuzeichnen. — Man suche des Kreises Mittelpunkt, und trage die Länge des Radius sechsmal neben einander als Sehne im Umfange herum, so werden dieselben eine reguläre Figur bilden.

§. 565. Die Seite des gleichseitigen Dreiecks, welches in einen gegebenen Kreis (Z. 55) paßt, zu finden. — Man nehme den Radius in den Zirkel und durchschneide damit aus einem beliebigen Punkte des Umfangs (C) denselben in 2 andern Punkten (D, E), und die Linie zwischen diesen letzten ist die gesuchte Seite.

Die Hälfte dieser Seite (DF) ist ungefähr die Seite des regulären Siebenecks für diesen Kreis. Die Seite des regulären Fünfecks für einen Kreis, Z. 56, findet man genau, wenn man auf die Mitte des Durchmessers AB eine senkrechte Linie CD setzt, die eine Hälfte des Durchmessers CB wieder halbirt in E, aus diesem Punkte mit der Eröffnung des Zirkels ED bis zum Ende der senkrechten Linie einen Bogen beschreibt, welcher die andere Hälfte des Durchmessers schneidet in F, denn die Sehne dieses Bogens FD vom letzten Durchschnittspunkte bis zu Ende des senkrechten Radius ist die gesuchte Seite.)

§. 566. Ein Quadrat im Kreise zu zeichnen (Z. 57). — Man errichte 2 Durchmesser auf einander senkrecht (AC, DB), und verbinde deren Endpunkte durch Linien.

§. 567. Aus der Seite irgend einer regulären Figur im Kreise (Z. 57, AB) die Seite einer Figur von doppelt soviel en Winkeln zu finden. — Man halbire den Bogen, der von dieser Sehne (AB) bespannt wird, und ziehe der Hälfte eine Sehne (AR) welche die gesuchte ist.

§. 568. Ueber eine gegebene Seite (Z. 50, AB) eine verlangte reguläre Figur mit Hülfe des dazu passenden Winkels (m) zu zeichnen. — Man setze ans Ende der Seite einen Winkel gleich dem gegebenen (ABC = m),

mache

mache den neuen Schenkel gleich dem gegebenen (BC = AB), und beschreibe durch den Scheitel und die beiden Endpunkte der Schenkel (B, A, C) einen Kreis, und trage die gegebene Seite, so oft es angeht, in die Peripherie als Sehnen nebeneinander herum, so werden dieselben die verlangte Figur bilden.

§. 569. Die Größe des Winkels irgend einer regulären Figur zu bestimmen. — Man ziehe von der Zahl der Seiten 2 ab, verdoppele den Rest und theile das Produkt mit der Seitenzahl, so zeigt der Quotient wieviel von einem rechten jeder Winkel enthält. ($6 - 2 = 4$; $4 \times 2 = 8$; $8 : 6 = 1\frac{1}{3}$, also ist der Winkel des regul. Sechsecks = $1\frac{1}{3}$ R = 120°).

§. 570. Zu 3 Linien (Z. 62, AB, AC, AD) die 4te Proportionallinie zu finden. — Man trage aus der Spitze eines beliebigen Winkels (A) auf einen Schenkel die beiden ersten, auf den andern Schenkel die dritte gegebene Linie auf, verbinde dann den Endpunkt der 1sten mit dem der 3ten durch eine Linie (BD), und ziehe aus dem Endpunkt der 2ten (C) eine Linie mit der vorigen parallel (CP ‡ BD), so ist die Linie vom Endpunkte der neuen bis zur Winkelspitze (PA) die gesuchte.

§. 571. Eine Linie (Z. 63, AB) nach demselben Verhältniß zu theilen, wie eine andere gegebene (AP) eingetheilt ist. — Man setze beide Linien unter einem beliebigen Winkel (A) zusammen, und verbinde ihre Endpunkte (B, P), ziehe mit dieser Linie (BP) parallele Linien aus allen Theilungspunkten der 2ten Linie nach der 1sten, so wird diese dadurch nach demselben Verhältnisse eingetheilt.

§. 572. Eine Linie (Z. 64, AB) in eine bestimmte Anzahl gleicher Theile (in 5) zu theilen. — Man setze an dieselben eine andere (AZ) unter einem beliebigen Winkel (A), trage auf die 2te Linie 2 beliebige gleiche Theile in der verlangten Anzahl nebeneinander auf, verbinde den Endpunkt des letzten Theils (T) mit dem Ende der 1sten Linie (B), und ziehe mit dieser Linie (TB) Parallelen aus allen Theilungspunkten nach der 1sten, welche dadurch in ebensoviel gleiche Theile zerlegt wird.

§. 573. Zwischen 2 Linien (Z. 83, AD, DG) die mittlere stetige Proportionallinie zu finden. — Man setze dieselbe aneinander in eine gerade Linie (AG) suche deren Mitte, und beschreibe aus derselben einen Bogen über der ganzen Linie; aus dem Punkte (D), wo beide gegebene Stücke zusammenstoßen, errichte man eine senkrechte Linie bis an den Bogen, so ist diese (DE) die gesuchte Linie.

§. 574. Ueber einer Linie (Z. 65, ab) ein Dreieck zu zeichnen, das einem gegebenen (ABCA) ähnlich ist. — Man setze an jedem Endpunkt der Linie einen Winkel, den 1sten gleich einem Winkel des gegebenen Dreiecks (a = A), den 2ten gleich einem andern Winkel derselben

selben (b = B); die beiden neuen Schenkel verlängere man, bis sie sich durchschneiden, so ist das dadurch entstandene Dreieck (abca) dem gegebenen ähnlich.

§. 575. Ueber einer Linie (Z. 37, ab) eine Figur zu zeichnen, die einer gegebenen (ABCDEA) ähnlich ist. — Man theile die gegebene Figur durch Diagonale in lauter Dreiecke, zeichne zuerst über der gegebenen Linie ein Dreieck dem ersten Theile (ABCA) der gegebenen Figur ähnlich, dann ein dem 2ten (ACDA) ähnliches Dreieck über der gleichgelegenen Seite (ac) des schon vorhandenen, und so fahre man bis zum letzten Theile der gegebenen Figur fort, so bilden die zusammengesetzten Dreiecke eine Figur der gegebenen ähnlich.

§. 576. Jedes Dreieck (Z. 78, n. 1) in eine verlangte Anzahl gleicher Theile zu theilen. — Man theile eine beliebige Seite (AB) in die vorgeschriebenen Theile, und ziehe aus allen Theilungspunkten Linien nach dem gegenüber liegenden Winkel.

§. 577. Jedes Parallelogramm (n. 2) in eine bestimmte Anzahl gleicher Theile zu theilen. — Man theile eine beliebige Seite so ein, und ziehe aus allen Theilungspunkten mit den angränzenden Seiten parallele Linien.

§. 578. Ein Quadrat (oder dessen Seite) zu finden, welches 2 Quadraten (Z. 75, $AK + CH$, oder auch den Quadraten zweier, oder mehrerer, gegebenen Linien Z. 79, $AB^2 + AC^2$)

AC²) zusammen gleich ist. — Man setze die gegebenen Seiten der beiden Quadrate unter einem rechten Winkel zusammen, und ziehe die Hypothenuse (BC), so ist dies die Seite des verlangten Quadrats, (welches man dann mit mehrern Linien fortsetzen kann, indem man die folgende wieder unter einem rechten Winkel an die gefundene setzt).

§. 579. Ein Quadrat (oder dessen Seite) zu finden, dessen Flächenraum der Unterschied zweier andern Quadrate (Z. 80, AB² — AC²) ist. — Man halbire die Seite des größern Quadrats AB), und beschreibe über ihr einen Halbkreis; aus dem einen Ende des Durchmessers (A) durchschneide man den Bogen mit der Eröffnung der Seite des kleinen Quadrats (AC), und ziehe von diesem Durchschnitt (C) eine Linie nach dem andern Ende des Durchmessers (B), so ist diese (CB) die Seite des gesuchten Quadrats.

§. 580. Jede geradlinichte Figur (Z. 81, n. 1, ABCDEA) in eine andere zu verwandeln, die eine Seite weniger, aber ebensoviel Flächenraum hat. — Man verbinde 2 Winkel (BAE, CDE), die zu beiden Seiten eines dritten (AED) diesem die nächsten sind, durch eine Diagonale, mit dieser parallel ziehe man durch den Scheitel des Zwischenwinkels (AED) eine Linie (GH), verlängere bis zu dieser den entfernten Schenkel (CD) eines verbundenen Winkels (CDE) durch dessen Spitze (bis G), und ziehe von dem Punkte (G), wo er er die Parallellinie trifft, eine Linie nach dem andern verbundenen Winkel (BAE), so ersetzen diese letzte Linie (GA) und die Verlängerung der einen Seite (DG) die beiden abgeschnittenen Seiten (AE und DE). Bei einer Figur mit einer sogenannten einspringenden Ecke (n. 2) ist die Verrichtung dieselbe.

§. 581. Ein Rechteck zu zeichnen, welches einem gegebenen Dreieck (Z. 82, ABCA) am Flächenraum gleich ist. — Man halbire eine Seite des Dreiecks (AB), errichte auf ihrer Mitte und an einem Ende senkrechte Linien (DE, AF) bis an eine Linie (CF), die aus dem der ersten Linie gegenüber liegenden Winkel (ACB) mit dieser (AB) parallel gezogen ist, so schließen diese beiden parallelen und die beiden senkrechten Linien das verlangte Rechteck (DF) ein.

§. 582. Jedes Rechteck (Z. 83, AC) in ein Quadrat von gleichem Inhalt zu verwandeln. — Man verlängere eine der längsten Seiten (AD), daß die Verlängerung (DG) gleich einer der kürzesten Seiten (DC) ist, beschreibe über der verlängerten Seite nebst ihrer Verlängerung (AG) einen Halbkreis, und ziehe die innerhalb desselben liegende kürzeste Seite (DC) bis an den Umfang, so ist diese mit ihrer Verlängerung (DE) die Seite des verlangten Quadrats.

§. 583. Jede geradlinichte Figur in ein Quadrat von gleichem Inhalt zu verwandeln. — Man verringere ihre Seitenzahl nach und nach

im-

immer um eine, bis man ein Dreieck von gleichem Inhalt hat, dieses verwandle man in ein Rechteck, und solches in ein Quadrat.

(Die Reduktion auf ein Dreieck kann man bei jeder Figur ohne einspringende Ecke (T. III. Z. 8, ABCDEFGA) dadurch abkürzen, daß man eine Seite DE zur Grundlinie wählt, und aus einem gegenüberstehenden Winkel BAG zu beiden Seiten herum immer eine Seite weniger macht nach §. 580, so, daß zuletzt die angenommenen Grundlinien auf beiden Seiten bis zu den gezogenen Parallellinien (HI, KL) verlängert wird.)

§ 584. Den Flächeninhalt eines gegebenen Rechtecks (Z. 74) nach jedem angenommenen Maaße (z. B. einem Zoll) zu berechnen. — Man messe 2 aneinander gränzende Seiten, multiplizire die Zahlen ihrer gleichen Theile, so zeigt das Produkt an, wieviel Quadrate des Längenmaaßes (Quadratzoll) die Fläche enthalte. Bei einem gegebenen Quadrat multiplizirt man die Zahl der Theile einer Seite mit sich selbst.

§. 585. Aus dem angegebenen Flächeninhalt eines Quadrats die Länge jeder Seite desselben zu berechnen. — Man ziehe aus der gegebenen Zahl des Quadratmaaßes die Quadratwurzel, so giebt diese die Länge der Seite nach demselben Maaße an.

§. 586. Den Inhalt jedes Parallelogramms (Z. 71) zu berechnen. — Man messe eine Linie als Grundlinie, und eine darauf senkrechte Linie als Höhe, multiplizire beide Zahlen, so giebt das Produkt den quadratischen Inhalt.

§. 587.

§. 587. Jedes Dreieck (Z. 72) zu berechnen. — Man multiplizirt die Länge der Grundlinie mit der halben Höhe oder der ganzen Höhe mit der halben Grundlinie.

§. 588. Jede geradlinichte Figur zu berechnen. — Man theile sie durch Diagonale in lauter Dreiecke, berechne dieses einzeln, und addire die Produkte.

(Den Flächeninhalt eines Kreises berechnet man wie den eines Dreiecks, dessen Grundlinie der halben Peripherie, und dessen Höhe dem Durchmesser gleich ist, nach den als die genauesten und bequemsten erfundenen Verhältnissen: Durchmesser zur ganzen Peripherie wie 7 : 22, oder 113 : 355, oder 100 : 314, oder mit Dezimalbrüchen 1 : 3,14 159265358979323846264. Man mißt daher den Durchmesser, sucht durch eins der obigen Verhältnisse die Peripherie und multiplizirt deren Hälfte mit der Länge des Durchmessers.)

§. 589. Den Inhalt eines Ausschnitts, dessen Bogen nach einem Längenmaaße gegeben ist, zu berechnen. — Man messe den Radius mit demselben Maaße, und multiplizire mit seiner Hälfte die Länge des Bogens.

§. 590. Aus 2 gegebenen Seiten eines rechtwinklichten Dreiecks die 3te Seite zu berechnen. — Man messe jede Linie und multiplizire die Zahl ihrer Theile mit sich selbst. Sucht man die Hypothenuse, so ziehe man aus der Summe beider Zahlen die Quadratwurzel, sucht man eine Kathete, so ziehe man das kleinere Produkt von dem größern ab, und aus dem Reste die Quadratwurzel.

§. 591. Aus der in Zahlen gegebenen Sehne eines Bogens (T. III. Z. 1, AB) und dem

Ra-

Radius die Sehne eines halb so großen Bogens (AE) zu finden. — Man nehme die Hälfte der Sehne (AF), und ziehe ihr Quadrat von dem des Radius (AC) ab; die Quadratwurzel des Restes (CF) subtrahire man von der Länge des Radius (CE), und das Quadrat dieses Restes (FE) addire man zum ersten Quadrat (der halben gegebenen Sehne AF), so ist die Quadratwurzel dieser Summe die gesuchte Länge der Sehne.

§. 592. Aus der Länge einer Sehne (AB) und der Länge einer Linie, die auf ihrer Mitte senkrecht an einen ihrer Bögen reicht (FE, Höhe ihres Bogens) den ganzen Durchmesser zu berechnen. — Man multiplizire die Hälfte der Sehnen (AF) mit sich selbst, dividire das Quadrat mit der Höhe des Bogens (FE) und addire diese Höhe wieder zum Quotienten.

§. 593. Den körperlichen Inhalt eines Würfels zu berechnen. — Man messe eine Kante desselben, und erhebe die Zahl ihres Längenmaaßes zur 3ten Potenz.

§. 594. Den cubischen Inhalt jedes Pfeilers (auch Cylinders) zu berechnen. — Man berechne ihre Grundfläche, und multiplizire deren quadratischen Inhalt mit der Höhe des Pfeilers, so gibt das Produkt seinen kubischen Inhalt.

§. 595. Einen Spitzpfeiler (auch Kegel) zu berechnen. — Man multiplizire den Inhalt ihrer Grundfläche nur mit einem Drittheil der Höhe.

§. 596. Den Inhalt jedes regelmäßigen Körpers zu berechnen. — Man berechne die quadratische Größe aller Seitenflächen, und multiplizire deren Summe mit einem Sechstheil der Höhe des ganzen Körpers.

§. 597. Die quadratische Größe der Oberfläche einer Kugel zu berechnen. — Man messe den Durchmesser, berechne daraus den Flächenraum des größten Kreises, und multiplizire diesen mit dem Durchmesser.

§. 598. Den kubischen Inhalt einer Kugel zu berechnen. — Man berechne ihre Oberfläche und multiplizire dieselbe mit einem Sechstheil des Durchmessers.

Andeutung einiger Verrichtungen der praktischen Meßkunst.

§. 599. Um ein Feld aufzunehmen oder eine Figur vom Felde (Z. 84, n. 1.) in einer ähnlichen Zeichnung auf Papier zu bringen (n. 2), mißt man ihre Seiten mit einem großen Maaßstabe und die Winkel mit dem Astrolabium oder Meßtisch, und trägt diese mit dem Transporteur, jene aber mit einem verjüngten Maaßstabe auf. Wenn man die Figur durch Diagonale in Dreiecke theilen kann, braucht man gar nicht die Winkel zu messen. Auch setzt man, Z. 84, den Meßtisch nur in einem Punkt, n. 1, A, n. 2, O, mißt von diesem aus sämmtliche Winkel der Diagonale, und macht die

Schenkel nach verj. M. St. den großen gleich, so bezeichnen die Enden der Schenkel die Ecken der Figur.

§. 600. Ohne Astrolabium und Meßtisch einen Winkel aufzunehmen, Z. 38, BAC, mißt man die Länge seiner Schenkel (allenfalls verkürzten) AD, AE und die Entfernung ihrer Endpunkte DE, welche 3 Längen nach verj. M. St. man auf dem Papier zu einem Dreieck daed verbindet, dessen Seite ed man nicht auszuziehen braucht, und die Schenkel ad, ae kann man nöthigenfalls verlängern. Wenn man einen stumpfen Winkel, Z. 39, CAD, übertragen soll, verlängert man gewöhnlich einen Schenkel durch die Spitze, und nimmt den spitzen DAE auf, aus dem man auf dem Papier leicht den stumpfen findet.

§. 601. Einen Winkel von einem Orte des Feldes, Z. 40, BAC, auf LM aus L, auf einen andern, zu übertragen, spannt man eine Schnur oder Kette um das beliebige Dreieck AEDA, macht LO = AE, und spannt über LO die Länge der Kette von AD und DE mit Festhaltung des Punktes D aus; so fällt dieser auf N, und man verlängert nöthigenfalls die Schenkel LN und LO. Durch Ausspannung gleicher Längen der Kette Z. 41, ED = FD, und Z. 42, CD = CE, kann man auch rechte Winkel finden, und durch Hülfe rechter oder gleicher schiefer Winkel auch Parallellinien ziehen. Z. 43 und 44.

§. 602. Um die Entfernung AB zweier Oer-

Oerter, Z. 66, A und B, zu finden, zwischen denen man nicht messen, wohl aber von beiden in geraden Linien zu einem 3ten Punkte C kommen kann, zieht man diese Linien AC und BC, trägt dieselben (n. 1) ebensoweit zurück nach E und D, welche dann gewiß ebensoweit von einander entfernt sind wie A und B; oder man trägt nur die gleichvielsten Theile der Linien AC und BC, etwa ¼ derselben) nach e und d zurück, so ist de der ebensovielste Theil (¼) von AB; oder man setzt in C den Meßtisch, nimmt auf denselben den Winkel ACB (n. 2), und macht die Schenkel desselben auf dem Meßtische, Ca und Cb nach dem verjüngten Maaßstabe gleich den im Großen gemessenen CA und CB, so ist gewiß auch AB nach demselben großen Maaßstabe so lang wie ab nach dem verjüngten.

§. 603. Wenn man, Z. 67, von C nur nach A in gerader Linie kommen, aber von beiden nach B sehen kann, so bezeichnet man, n. 1, die Linie AB so weit es angeht, trägt dieselbe eine Strecke zurück nach D, mißt dann AC und DC, und trägt sie zurück nach E und F; in der Linie FE geht man so weit fort, bis man von G aus die Punkte C und B in gerader Linie sieht, d. h. B, durch den Stab in C verhindert, nicht sehen kann, dann ist GE = AB; oder man trägt nur gleichvielste Theile von AC und DC nach e und f zurück, so ist nach gleichem Verfahren ge der ebensovielste Theil von AB; oder man nimmt in

C

C mit dem Meßtische die Winkel DCA und ACB auf, macht die Schenkel Cd und Ca nach dem verjüngten Maaßstabe = CD und CA, und zieht auf dem Papier eine Linie von d durch a so weit, daß sie den 3ten Schenkel Cb trifft, so ist ab nach dem verjüngten Maaßstabe = AB; oder man nimmt (n. 3) in C bloß den Winkel ACB auf, macht ca nach dem verjüngten Maaßstabe = CA, setzt dann den Meßtisch in A so, daß a auf A, und ac längs AC liegt, nimmt auch den Winkel CAB auf, und zieht den Schenkel ab auf dem Papier so weit, bis er den Schenkel cb schneidet; so ist ab nach dem verj. Maaßstabe = AB

§. 604. Wenn man, Z. 68, zu keinem der Punkte A und B kommen, aber beide aus C sehen kann, so kann man nach den vorigen Arten die Entfernungen AC und BC finden, sie nach E und D oder nur in gleichvielstem Theilen) zurücktragen, wodurch man wieder ED = AB findet; oder man wählt sich (n. 2) 2 Punkte C und D, nimmt zuerst in C die Winkel ACB und BCD auf, macht den Schenkel cd nach verj Maaßstabe = CD, setzt dann den Meßtisch in D so, daß d auf D, und db längs DC liegt, nimmt auch die Winkel BDA und ADC auf, und zieht die Schenkel dc und da so weit, daß sie cb und ca schneiden, so ist ab nach verj. Maaßstabe = AB; oder man nimmt (n. 3) außer den Punkten C und D noch einen 3ten E in gerader Linie mit DB, und einen 4ten F in der geraden Linie

nie EA an, nimmt dann bloß in C mit dem Meßtische die 4 Winkel ACB, BCD, DCF und FCE auf, mißt die Linien CD, CF, CE, und macht ihnen gleich nach dem verj. Maaßstabe die Schenkel ce, cf, ce, und zieht dann von e durch f und d gerade linien so weit, bis sie die Schenkel cd und cb schneiden, so ist ab nach verj. Maaßstaabe = AB.

§. 605. Eine Höhe, Z. 69, AB, d. h. eine senkrechte Linie (hier Vertikal-Linie genannt) zu finden, wendet man in einem Punkte C den Meßtisch vertikal, zieht darauf eine Horizontal-Linie ch, und macht sie nach dem verj. Maaßstabe = cH = CB, errichtet am Punkte h eine senkrechte linie, trägt den Winkel HcA auf, und verlängert den Schenkel ca so weit, bis er die senkrechte Linie schneidet, so ist ah nach verj. Maaßstabe = AH, und dazu HB gemessen, giebt die ganze Höhe AB. Auch kann man die Länge des Schattens eines Gegenstandes zu gleicher Zeit mit dem Schatten eines eingesteckten Stabes messen, und dann den sichern Schluß machen: wie sich der Stab zu seinem Schatten verhält, so auch die Höhe des Baums zu dem seinigen.

§. 606. Wenn man aber zu dem Fuße der Vertikallinien, Z. 70, R oder Q auch nicht kommen kann, so nimmt man 2 Punkte D und C an, setzt zuerst den Meßtisch in D, nimmt den Winkel AdB auf, und theilt adb durch die Horizontallinie dr; nach Aufnahme

des

des Winkels dDC und Begränzung des Schenkels dc nach dem verj. Maaßstabe = DC, setze man den Meßtisch in C, nehme den Winkel ACB auf, und ziehe die Schenkel ca und cb so weit, bis sie da und db schneiden; dann ziehe man aus a und b senkrechte Linien auf dr, so ist ar + hb nach verj. Maaßstabe = AQ.

§. 607. Durch ähnliche Verrichtungen kann man ein Feld, in welchem man nicht umhergehen und messen kann, oder eine ganze Gegend (deren wichtige Punkte durch Thürme bezeichnet sind), aufnehmen, Z. 86. Man wählt 2 Oerter, von welchen man nach allen Ecken und andern wichtigen Punkten sehen kann, n. 1, A und B, n. 2, m und n, nimmt mit dem Meßtische in dem 1sten Orte alle Winkel nach den nöthigen Punkten auf, dann in dem 2ten Orte dieselben Winkel, deren Schenkel ihre Schenkel aus dem ersten Orte schneiden, worauf die Berührungspunkte die wichtigen Punkte der Gegend bezeichnen.

§ 608. Wenn man aber nur von jeder Ecke des Feldes zu den beiden angränzenden sehen und kommen kann, so geht man mit dem Meßtische von einer Ecke zur andern, Z. 87, nimmt jeden Winkel auf, und trägt die Schenkel nach verj. Maaßstabe auf, wodurch die Figur allmählig auf dem Meßtische zu Stande kommt.

§. 609. Den Flächeninhalt eines angenommenen Feldes, Z. 89, berechnet man wie jede Figur nach Dreiecken, da es nach großem Maaßstabe ebensoviel

soviel quadratischen Raum enthält, wie die ähnliche Figur nach verj. Maaßstabe.

§. 610. Wenn das berechnete Feld halbirt werden soll, Z. 90, so theilt man die Zahl des Quadratmaaßes mit 2, und wenn ein Dreieck ABCA noch nicht soviel enthält, so setzt man ihm noch ein kleines Dreieck ACpA zu, dessen Höhe man findet, wenn man den fehlenden Flächenraum mit der Hälfte seiner Grundlinie dividirt; in dieser Höhe zieht man eine Linie qp mit AC parallel, und zieht von einem Ende der einen Parallellellinie zum entgegengesetzten Ende der andern eine Linie ap. — Auf ebensolche Art kann ein Feld in mehrere Theile getheilt werden.

Berichtigungen.

Seite	129	Zeile	18: einzige muß heißen: einziger
—	131	—	10: einen — — einem
—	—	—	11: eine — — einer
—	—	—	26 hinter Quadratur muß Komma stehen
—	—	—	— hinter Körper muß kein Komma
—	—	—	— des m. h. das
—	132	—	2 Raum m. h. Namen
—	133	—	15 große — — großer
—	136	—	2, 5, 9 Punkt muß ein Semikolon stehen
—	—	—	3, 6, 10 Daß m. h. daß
—	—	—	7, 11 Durchschnittslinien m h. =linie
—	138	—	20 welcher m. h. welchen
—	139	—	7 eine m. h. einer
—	—	—	10 andere m. h. andern
—	140	—	9 nun m. h. nur
—	141	—	9 andere m. h. andern
—	—	—	22 gleichen m. h. gleichem
—	—	—	29 gleichen Bogen m. h. gl. Bögen
—	145	—	12 hinter andern m. st. ebensohohen
—	148	—	7 = bc : BC m. h. , a = A
—	150	—	27 ihre m. h. die Quadrate ihrer
—	—	—	32 ihre m. h. ihrer
—	154	—	4 jedem m. h. mit jedem
—	155	—	17 Kreisbogen m. h. Kreisbögen.
—	156	—	27 gleichschenkliches m. h. =ges
—	158	—	2 ihren m. h. ihre
—	—	—	26 eine m. h. einer
—	159	—	23 über eine m. h. über einer
—	160	—	31 jeden m. h. jedes
—	161	—	26 Sehne m. h. Sehnen
—	162	—	28 ziehe der m. h. ziehe über der
—	163	—	5 die m. h. der
—	164	—	11 hinter Linie muß 2 fort
—	—	—	29 jedem m. h. jeden
—	168	—	10, 11 angenommenen Grundlinien m. h. =ne =nie
—	169	—	3, 4 der ganzen m. h. die ganze
—	—	—	7 diesen m. h. diese
—	170	—	16 Sehnen m. h. Sehne
—	175	—	27 Vertikallinien m. h. =linie
—	176	—	29 angenommenen m. h. aufgenomm.

Mehrmals Diagonale in der Mehrheit m. h. Diagonalen.

Behufs der hier ausgelassenen Beweise und eines ausführlichern praktischen Gebrauchs sind zu empfehlen:

Dr. Bauers H., Lehrbuch der einfachen Rechnungsarten, gr. 8. 1 thlr.

Dessen Auszug aus obigem Werke, 8. 12 gr.

Dessen Anfangsgründe der Geometrie, gr. 8. 12 gr.

Nitsche K. G., Rechnenbuch für Schulen, nach der gewöhnlichen Art bearbeitet, 8. wohlfeile Ausgabe, 18 Bogen stark. 6 gr.

Einleitung in die Wappenkunde.

§. 1.

Wappen nennt man jetzt ein von der höchsten Landesobrigkeit bewilligtes Unterscheidungszeichen einer Familie oder andern Gesellschaft, z. B. einer Stadt, doch vorzüglich einer adlichen oder fürstlichen Familie, denn sie schreiben sich aus den alten Ritterzeiten her, wo jeder Ritter auf seinen Waffen verschiedene Zeichen hatte, um sich von andern zu unterscheiden. Ein Wappen ist also ursprünglich die Abbildung der mit verschiedenen Figuren bezeichneten Wappen oder Waffen eines Ritters, welche auch alle seine Nachkommen als ihr Unterscheidungs- und Ehren-Zeichen beibehalten. Daher sind die wesentlichsten Stücke eines Wappens Schild und Helm, welche die vorzüglichsten Waffen der Ritter waren, worauf die Zeichen befindlich waren. Die fürstlichen Familien haben statt des Helms über

ihrem

ihrem Wappen eine Krone, die man aber jetzt auch häufig über andern Wappen findet.

§. 2. Die ältesten Wappen sind unstreitig die adlichen Lehnwappen, welche zu den Zeiten Kaiser Heinrichs des Voglers, bei Gelegenheit der von ihm eingeführten Turnierspiele aufgekommen zu sein scheinen; nähere Nachricht davon findet man im 11ten Jahrhundert, da die Zunamen derer von Adel, die von ihren Lehngütern hergenommen waren, in Gebrauch kamen. Z. E. hießen die Herren von Apold, die Grafen von Schwarzburg, von ihren Lehngütern so, wodurch es denn geschah, daß, gleichwie die Namen der Lehen den Besitzern die Benennung gegeben, also auch aus Lehnwappen Familienwappen wurden.

§. 3. Daher leistet die Wappenkunde große Dienste bei dem Staatsrechte, bei der Staatswissenschaft, in der Genealogie, und in der Historie. Besonders muß ein Edelmann nicht unwissend darin sein; denn sie beweiset den Adel, unterscheidet die Stände, und zeigt das Alter oder den Ursprung und oft die Geschichte einer Familie an. Sie wird gewöhnlich die Heraldik oder Heroldskunst genannt, weil sich in ältern Zeiten die Herolde besonders damit beschäftigen mußten.

§. 4. Herolde, d. h. im Heere alt gewordene Krieger, waren hohe Beamte der vormaligen deutschen Könige und Kaiser, welche als bevollmächtigte Gesandten ihrer Herren an frem-

fremde Höfe geschickt wurden, Kriege ankündigen, und die Achtserklärungen bekannt machen mußten. Bei den Turnieren mußten sie die Cartels oder Artikel unter Trompeten- und Paukenschall bekannt machen, die Wappen der Ritter genau untersuchen, welche Verrichtung die Wappenschau hieß, und wenn wegen der Wappen und Ahnen ein Streit entstand, das Urtheil sprechen, daher sie denn auch Wappenrichter und Wappenkönige genannt wurden. Sie trugen besonders prächtige Kleidungen, Krone und Scepter, und ihre Diener wurden Ehrenknechte genannt.

§. 5. Die vornehmste Kenntniß der Wappen besteht darin, die Metalle, Farben und Figuren in den Wappen zu kennen; erstere sind Gold und Silber, die Farben oder die Emaille sind die blaue, rothe, grüne, schwarze und die Purpur-Farbe, welche sowohl auf dem Schilde oder Schildchen (Zeichnung 1) wie auf den darin befindlichen Figuren, durch Punkte und Striche angedeutet sind.

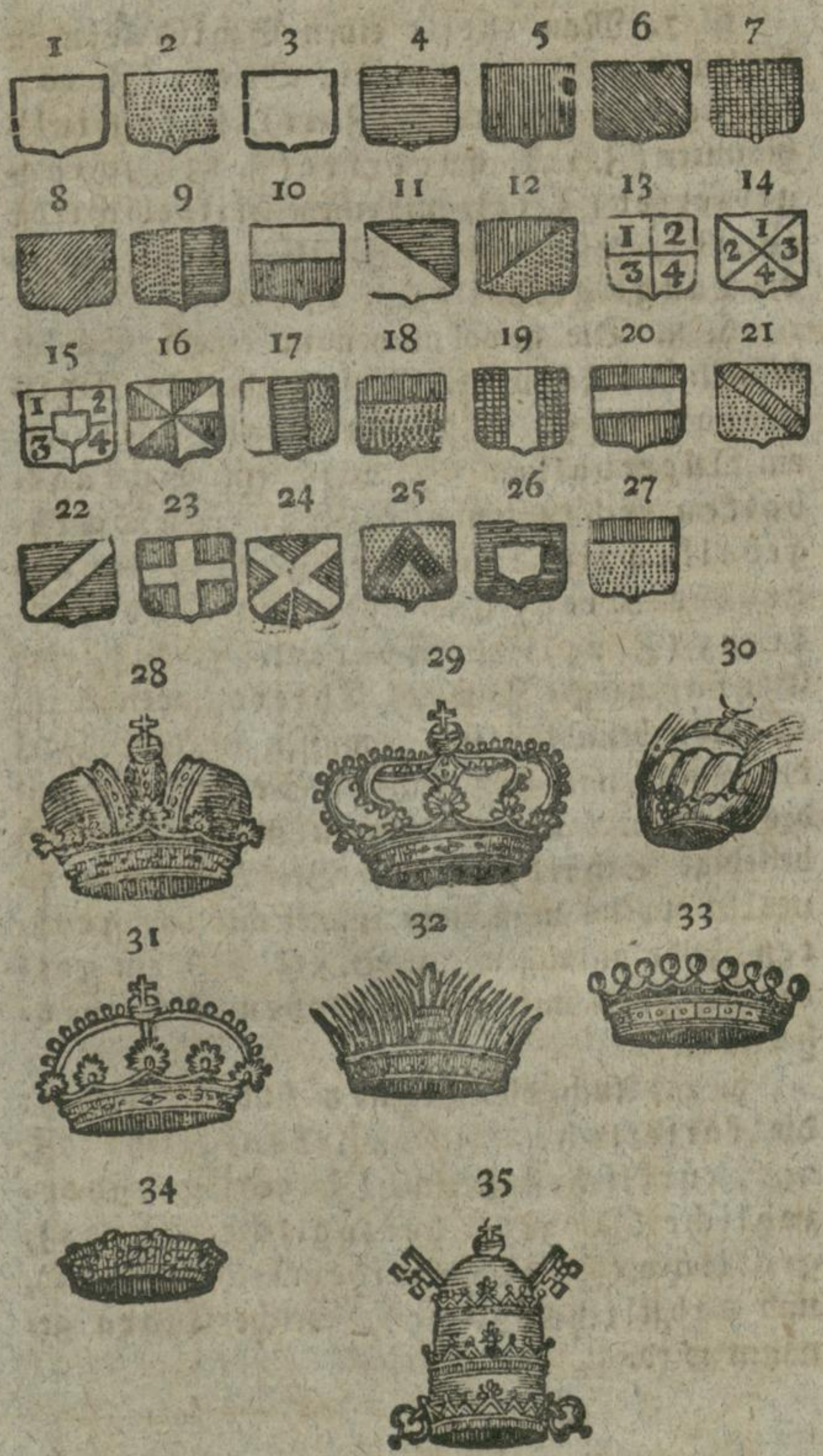
§. 6. Das Gold ist mit Punkten gezeichnet (Zeichn. 2), das Silber ist ganz weiß (Z. 3); die blaue Farbe besteht in lauter horizontalen (Z. 4), die rothe in senkrechten Strichen (Z. 5); die grüne hat Striche von der linken Seite zur rechten hinunter (Z. 6), die schwarze sich durchkreuzende horizontale und senkrechte (Z. 7), die Purpurfarbe Striche von der rechten Seite zur linken hinunter (Z. 8).

§. 7.

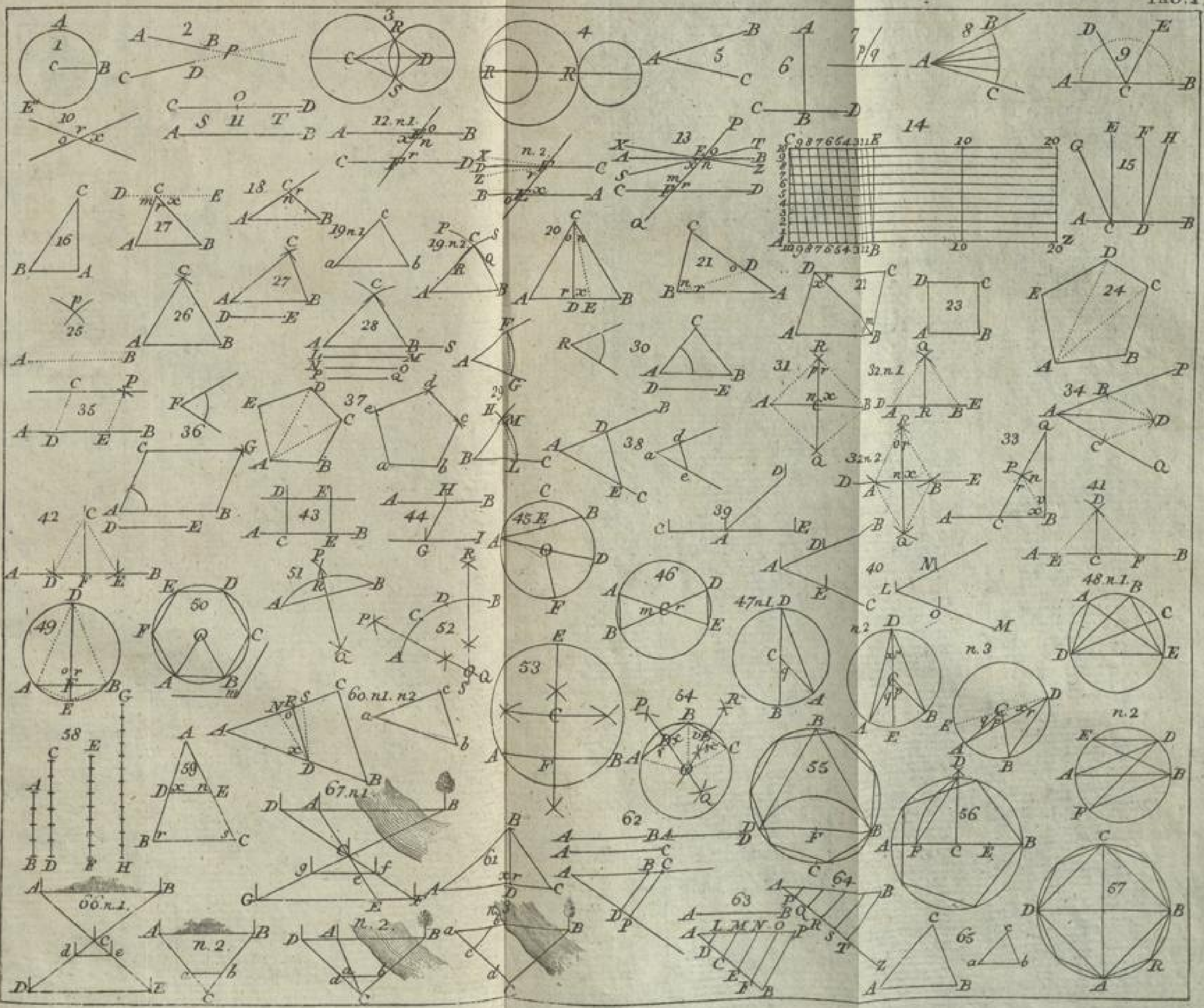
§. 7. Man theilt einen Schild ein in die Länge (Z. 9), in die Queer (Z. 10), schrägrechts hinunter (Z. 11), schräglinks hinunter (Z. 12), quadrirt (Z. 13), schräggeviertet (Z. 14), mit einem Mittelschilde (Z. 15), geständert (Z. 16), dreifach in die Länge getheilt (Z. 17).

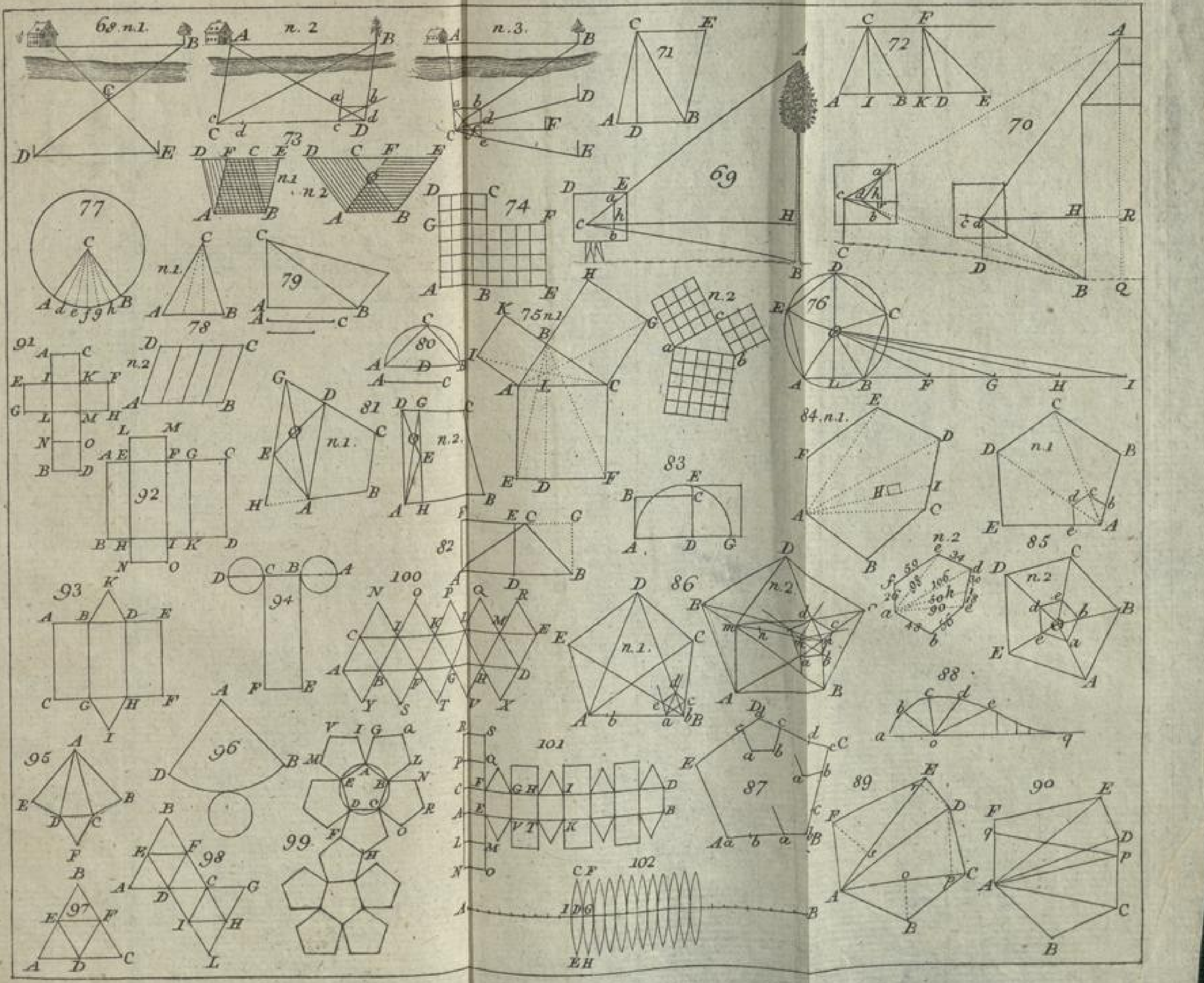
§. 8. Die gewöhnlichen in einem Schilde befindlichen Figuren sind folgende: ein Schildeshaupt (Z. 18), ein Pfahl (Z. 19), ein Queerbalken (Z. 20), ein Schrägebalken rechts hinunter (Z. 21), ein Schrägebalken links hinunter (Z. 22), ein stehendes Kreuz (Z. 23), ein Andreaskreuz (Z. 24), ein Sparren (Z. 25), eine Einfassung (Z. 26). Thiere, welche im Wappen befindlich sind, müssen in der Regel den Kopf nach der rechten Seite des Schildes kehren. Dazu kommen noch gewöhnlich beliebige Schildhalter. Bei Auslegung eines Wappens muß man immer mit dem größten Felde anfangen, z. B. (Z. 27) ein goldenes Feld mit einem rothen Schildeshaupte.

§. 9. Auch die Kronen sind verschieden: die kaiserliche (Z. 28), königliche (Z. 29), türkisch-kaiserliche (Z. 30), großherzogliche (Z. 31), herzogliche (Z. 32), gräfliche (Z. 33), freiherrliche (Z. 34), und päbstliche (Z. 35), welche Tiara genannt wird.


1 2 3 4 5 6 7
8 9 10 11 12 13 14
15 16 17 18 19 20 21
22 23 24 25 26 27
28 29 30
31 32 33
34 35

Tab. I




68. n.1.
n. 2
n.3.
69
70
71
72
73
74
75 n.1
n.2
76
77
78
79
80
81
82
83
84. n.1.
85
86
87
88
89
90
91
92
93
94
95
96
97
98
99
100
101
102

Tab. III.